



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Signály, časové řady a lineární systémy

Jiří Holčík

Duben 2012



Příprava a vydání této publikace byly podporovány projektem ESF č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „Víceborová inovace studia Matematické biologie“ a státním rozpočtem České republiky.

Předmluva

Zpracování signálů je klasická technická, nebo možná ještě lépe elektrotechnická disciplína. Ukazuje se však čím dál tím více, že pojmy a teoretické nástroje používané v tomto oboru mohou být užitečnou alternativou a doplňkem statistických postupů používaných při analýze časových řad v medicíně, epidemiologii, analýze procesů probíhajících v našem životním prostředí i ekonomice, a mnoha dalších odborných oblastech. Alternativou, která v nejednom případě dokáže i vhodně vysvětlit, či dokonce dát rozumný smysl výsledkům, kterých bylo dosaženo pomocí statistických algoritmů. Ovšem bohužel, či vlastně naopak bohudík, v nejednom případě také ukázat na ne příliš velkou smyslnost či rozumnost toho, čeho bylo pomocí statistiky dosaženo. Proto se domníváme, že základy teorie zpracování signálů, resp. lépe jejich matematických modelů a zejména z pohledu jejich diskrétní reprezentace, tj. časových řad, rozhodně patří do curricula studijního oboru Matematická biologie, jak je tradován na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. A byli bychom rádi, kdyby se i touto publikací podařilo alespoň v některých studentech našeho studijního oboru vzbudit zájem o tuto problematiku a schopnost vnímat její krásy.

Na dotváření konečného tvaru těchto textů se nezanedbatelnou měrou podíleli oba její recenzenti – prof. Ing. Vladimír Šebesta, CSc. a doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr, kterým patří za jejich pomoc vřelý dík. Zejména prof. Šebestovi jsem vděčný, protože to byl on, kdo mě kdysi před dlouhými léty uváděl do této disciplíny, byť v těch dobách to bylo o něčem podstatně jiném. Doc. Pospíšil teď naopak hlídal matematickou čistotu a správnost napsaného, tedy to s čím jsou technici, mě nevyjímaje, občas na kordy. Při pomoci s doladováním závěrečné podoby této publikace nelze opomenout ani mého kolegu a spolupracovníka, prof. RNDr. Jiří Hřebíčka, CSc., který se mi při dobrovolném čtení tvořeného textu snažil poctivě vrátit razanci a důkladnost, s níž jsem se naopak já snažil přečíst jeho díla, vznikající, stejně jako tato publikace s podporou a v rámci projektu ESF OPVK č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „*Víceoborová inovace studia Matematické biologie*“.

Na závěr této naprosto úvodní části předkládané publikace si nemohu nepovzdechnout nad časovou tísní, které mě více než kdy jindy provázela při psaní následujících kapitol. A proto bych i rád poprosil laskavého čtenáře i neméně laskavou čtenářku o shovívavost při kritice případných nedostatků. Dokonce bych byl velice rád, kdyby mě o všech nedokonalostech tohoto textu informovali. Určitě to pomůže při tvorbě jeho budoucích modifikací.

Všem přeji pěkný den!

V Brně 1. dubna 2012

Jiří Holčík

© Jiří Holčík, 2012
ISBN 978-80-7204-792-5

1 Kapitola úvodní – především inspirační a motivační

1.1 Co očekáváme od této kapitoly

Rádi bychom, kdyby laskavý čtenář po přečtení této kapitoly znal potřebné základní pojmy, jejich význam, podstatné souvislosti, aby věděl, proč jsou důležité a k čemu to všechno je. A hlavně, aby si chtěl přečíst všechny další kapitoly této publikace.

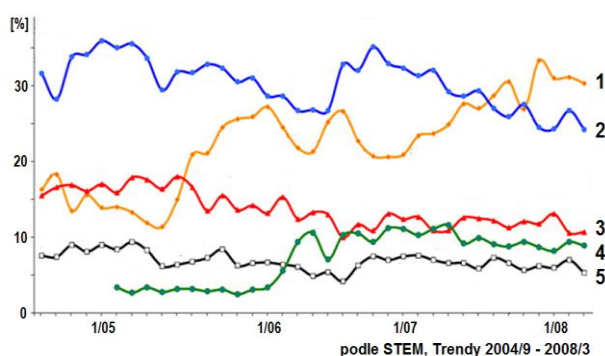
1.2 Začínáme – několik příkladů na úvod

V medicíně - epidemiologii, fyziologii i jiných medicínských oborech, v biologii, environmentalistice, ekonomice, sociologii a v mnohých dalších odvětvích a odborných disciplínách je často třeba zpracovávat data, která získáváme buď **pozorováním**¹ chování určitých reálných objektů, nebo případně (pokud to jde) na základě cíleně připravených **experimentů**². Získaná data mohou popisovat nějakou konkrétní situaci v jednom určitém čase, příp. na čase vůbec nezáleží, nebo naopak vyjadřují hodnoty určitých zajímavých veličin jak se mění v čase (obr.1.1).

Zabývejme se nyní druhým případem.

Křivky na obr.1.1 představují okamžité procentuální hodnoty preferencí českých politických stran v letech 2004 – 2008. Jsou vytvořeny interpolací mezi zjištěnými hodnotami v jednotlivých měsících (průzkumy se ale většinou nedělaly o prázdninách, nejdelší výpadek nastal v letních měsících roku 2006, mezi jednotlivými hodnotami nejsou vždy stejné časové intervaly – později uvidíme, že z hlediska analýzy to není zrovna příznivá situace). Je zřejmé, že preference jednotlivých politických stran je definována v jakémkoliv časovém okamžiku, je to veličina v čase spojitá. To, že známe její hodnoty jen v některých časových okamžicích, je formálně důsledkem tzv. **vzorkování**³.

Frekvence průzkumů (zpravidla jednou za měsíc) je v tomto případě dána organizačními a ekonomickými kritérii a důvody. Primárně je v každém časovém okamžiku k dispozici vektor pěti hodnot, reprezentujících preference pěti politických stran a v čase uspořádaná množina těchto vektorů popisuje, jak se preference všech pěti stran mění s časem.



Obr.1.1 Dynamika preference českých politických stran

¹ **Pozorování** je založeno na pasivním sledování určitých procesů a souvisejících skutečností, pokud možno v jejich přirozeném stavu, co nejméně ovlivněném pozorovatelem. Pozorování poskytuje informaci o vnějších projevech a vztazích sledovaného objektu či procesu (tvar, rozměry, podobnost, fyzikální či chemické vlastnosti, časová následnost). Význam pozorování klesá v situacích, kdy nabývají na důležitosti příčiny pozorovaných jevů, příp. charakter a podstata uvnitř zkoumaného objektu.

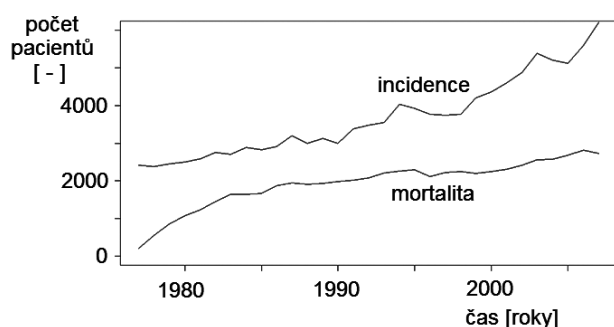
² **Experiment** vychází z aktivního přístupu ke zkoumání daného objektu. Spočívá na záměrně vyvolaných změnách podmínek existence a funkce daného objektu, které mají přimět zkoumaný objekt projevit se za různých uměle navozených situací. Výchozím předpokladem pro uspořádání experimentu je formulace hypotézy o analyzovaném objektu. Hypotézy i následné experimenty jsou: vyhledávací (heuristické) – „co se stane, uděláme-li toto?“ a ověřovací (verifikační): „opravdu se to stane, když uděláme toto?“

³ **Vzorkování** je postup výběru jednotlivých pozorování, na jehož základě získáváme informaci o vlastnostech sledované skutečnosti či jevu. Vzorkování v ideálním případě zachovává informaci, obsaženou ve vzorkovaném ději.

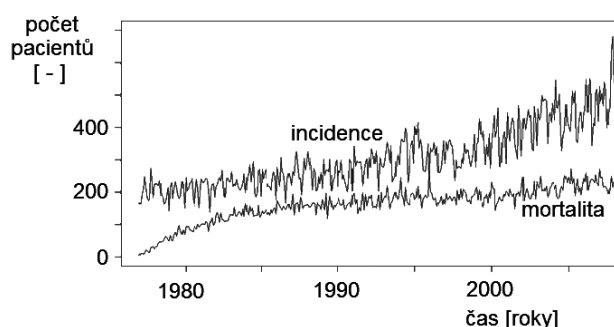
V datech i zobrazených křivkách lze sledovat různé jevy – *trend*⁴ vyjadřující dlouhodobé tendence hodnot preferencí – např. kontinuálně klesající trend preferencí u křivky 3, rostoucí preference u jinak velice neuspořádaného průběhu křivky 1. Je patrný i *oscilační*⁵ charakter – u většiny křivek s poměrně vysokou frekvencí, u křivky 2 i pomalejší oscilace s periodou přibližně dva roky. Zajímavý průběh má křivka 4, která z nízké úrovně po začátku roku 2005, zřejmě působením nějakého vnějšího vlivu rychle a výrazně vzrostla. Charakteristický je u této křivky i výskyt tlumených oscilací po tomto rychlém nárůstu u jinak relativně kmitů prosté časové závislosti. Analýza dat tohoto charakteru (*časových řad*⁶) zkoumá charakter trendu, odhad jeho parametrů a v důsledku zdůvodnění tohoto dlouhodobého směřování (s ohledem na jiné skutečnosti jako jsou různé demografické charakteristiky společnosti) charakter oscilujících složek, jejich základní parametry (frekvence, velikost výchylky), příp. opět jejich vztah

k dalším sociologickým procesům. Kromě deterministických složek (trendu a oscilací) je součástí časových řad i náhodná šumová složka.

Křivky na obr.1.2a popisují dynamiku incidence (vzniku nových onemocnění) a mortality (počtu úmrtí) zhoubného nádorového onemocnění prsu žen v České republice v časovém rozpětí od roku 1977 do roku 2007. V zobrazeném případě hodnoty obou veličin představují absolutní počty pacientů za celý kalendářní rok. Na rozdíl od předchozího příkladu, který popisoval aktuální okamžitý stav hodnot sledovaných veličin, mají tyto údaje charakter akumulční (integrální) za určité časové období (v tomto konkrétním případě za jeden rok). Zobrazené křivky jsou poměrně hladké, bez výrazných změn úrovně, v podstatě zobrazují



a)



b)

Obr.1.2 Vývoj incidence a mortality zhoubného nádoru prsu v ČR – a) roční vzorkování; b) měsíční vzorkování

pouze základní dlouhodobou tendenci vývoje onemocnění. Na obr.1.2b jsou zobrazeny tytéž veličiny s tím, že počty nových onemocnění či úmrtí jsou shromažďovány v měsíčních intervalech, tedy dvanáctkrát častěji. Je patrné, že se zcela změnil charakter dat – zůstal trend, výrazně se ale projevila oscilační periodická složka. Z obou případů vyplývá, že zvýšení frek-

⁴ *trend* (angl.) – vývojová tendence, celkový obecný sklon směřování dlouhodobé dynamiky; v tomto smyslu se používá od konce 19. století.

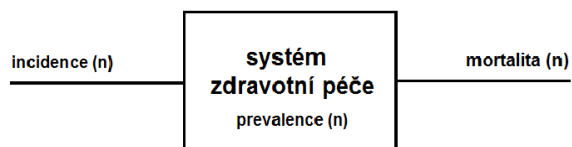
⁵ *oscilace* (lat. *oscillatio*) – houpání (se), kolébání (se), kývání (se), resp. kmitání nebo kmitavý děj, změna nějaké veličiny vykazující opakování, střídání nebo tendenci k němu; slova *oscillum* se používalo pro označení malé masky boha Dionýza (Baccha), která se věšela v blízkosti vinic a její houpavý pohyb způsobený vlivem větru plašil ptáky.

⁶ *časová řada* (mat.) – je uspořádaná množina hodnot určité veličiny $\{y_t; t = t_1, t_2, \dots, t_n\}$, kde index t určuje čas, kdy byla hodnota y_t určena; v případě, že jsou časy t_i rozmístěny na časové ose pravidelně, bývá výše uvedený zápis zjednodušován do formy $\{y_t; t = 1, 2, \dots, n\}$. Tímto způsobem zápisu je ale potlačována časová závislost sledované veličiny a je nahrazována pouhou závislostí na pořadí, což může být v různých situacích nežádoucí, na druhé straně tento zápis umožňuje použít teoretického aparátu časových řad i pro jiné formy závislosti, např. na prostorových souřadnicích.

vence vzorkování odhalilo v datech některé závislosti, které v původním vyjádření nebyly vidět, jinými slovy frekvence vzorkování může být podstatná k zachycení jednotlivých složek sledovaného děje.

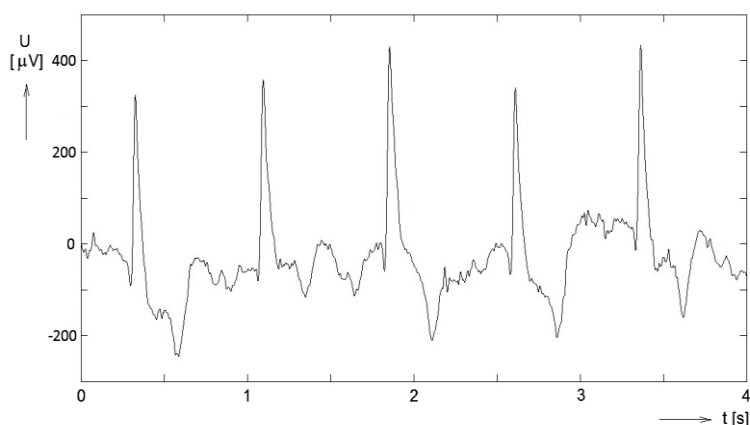
Na rozdíl od výše uvedeného příkladu známe hodnotu sledovaných veličin až v okamžiku ukončení intervalu, ve kterém kumulujeme počty onemocnění či úmrtí. Jejich hodnoty tedy nejsou definovány pro všechny časové okamžiky, ale jen pro určité zvolené časy. Obě zobrazené veličiny proto nejsou v čase spojité, nýbrž primárně v čase **diskrétní**⁷, byť jsou jednotlivé hodnoty na obrázcích proloženy spojitou čarou.

Incidenci a mortalitu můžeme považovat za vstup a výstup **systému**⁸ zdravotní péče (obr.1.3). Vzájemný vztah mezi mortalitou a incidencí formálně charakterizuje vlastnosti péče o pacienty – staticky menší mortalita při stejné incidenci znamená kvalitnější léčbu a naopak, dynamicky změny incidence se prostřednictvím léčebné péče odrážejí ve změnách mortality. Stav systému zdravotní péče je v relaci mezi oběma epidemiologickými veličinami charakterizován tzv. prevalencí, tj. okamžitým absolutním či relativním počtem pacientů s daným onemocněním. Analýzou vzájemných vztahů mezi uvedenými veličinami můžeme charakterizovat vlastnosti zdravotní péče a její kvalitu.



Obr.1.3 Systémový pohled na epidemiologické veličiny

Konečně, na obr.1.4 je zobrazen průběh elektrokardiografické křivky koně (záznamu elektrického napětí charakterizujícího elektrické procesy na srdci způsobující stah jednotlivých srdečních buněk, které je snímáno z povrchu těla). Tvar EKG křivky vypovídá o elektrických a zprostředkovaně i mechanických vlastnostech srdečního svalu, příp. částečně celé kardiovaskulární soustavy. Napětí **signálu** EKG je samozřejmě definováno v čase spojitě. Posloupnost jednotlivých hodnot ze snímaného napětí opět získáváme pomocí vzorkování, jehož frekvence musí respektovat vlastnosti původního průběhu napětí. I když průběh EKG napětí vyjadřuje dynamický proces probíhající na srdci, při jeho morfologické analýze bývá část průběhu, která reprezentuje jeden srdeční cyklus, považována za statický popis elektrických vlastností srdce.



Obr.1.4 Signál EKG koně v kroku

⁷ **diskrétní** (franc. *discret*, lat. *discernere*, rozlišovat; *discretus* rozdělený) v matematice, v technice a v informatice znamená nespojitý, nebo také digitální. V technické odborné literatuře je však pojem diskrétní (v čase) považován za podмноžinu pojmu digitální (je diskrétní i co do úrovně).

⁸ **systém** (řec. *σύστημα*) - složené, v celek seskupené), soustava - souhrn prvků, sdružený vzájemnými vazbami do smysluplného celku, který se navenek projevuje určitou formou chování. Původně slovo vytvořeno složením předpony *σύν-* dohromady a základu *ἵσθημι* znamenajícím stát, postavit se, vydržet, stanovit, postavení. Ve významu „souhrn souvisejících principů, skutečností, resp. myšlenek“ je pojem systém zmíněn již v 1. pol. 17. stol., v souvislosti s živými organismy – „tělo jako organizovaný souhrn vitálních procesů“ byl použit na konci 17. století.

1.3 Pojmy z titulu

1.3.1 Signál a časová řada

Pokusme se nejdříve nový pojem definovat.

Signál je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí **informaci**⁹ o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

Vidíme, že podle uvedené definice má signál dvě základní složky:

- hmotný **nosič** - materiální jev či veličinu, která tento děj vyjadřuje (elektrické napětí či proud, potištěný papír, žaludeční štávy, u nichž měříme např. jejich kyselost, počet osob s určitým onemocněním);
- nehmotnou **informaci** o zdrojovém systému.

První z obou uvedených složek způsobuje, že pojem signál je často spojován s technickými problémy přenosu a zpracování dat, jako jsou otázky televizního či rozhlasového vysílání a příjmu, komunikace pomocí mobilních i stacionárních telefonů, radarové techniky, satelitní navigace, apod. Nicméně z hlediska analýzy vlastností zdrojového objektu, resp. systému není tato materiální složka zas až tak důležitá, zcela podstatná je ale složka informační.

Podobně lze nahlížet i na pojem **data**¹⁰, která také mají svou hmotnou (nosič dat – CD, notes, ...) i nehmotnou informační složku (datum a místo narození). Formálně lze chápat pojem data za obecnější. Signál je významově spojen s dynamikou – v čase, nebo prostoru (RTG snímek může být chápán jako dvourozměrný signál, kde nezávislými veličinami jsou dvě prostorové souřadnice a závislou veličinou úroveň zčernání filmové fólie), zatímco pojem data určitě a možná především používáme i při práci s časově, či prostorově neměnnými hodnotami.



Obr.1.5 Záznam signálu EEG

⁹ **informace** (lat. *informatio*) - představa, obrys, výklad, poučení; i laik v latinském originálu slova nepochybně pozná předponu „in-“ s významem do, v, na a kmen „forma“ vyjadřující tvar.

• poznatek (znalost) týkající se jakýchkoliv objektů, např. faktů, událostí, věcí, procesů nebo myšlenek včetně pojmů, které mají v daném kontextu specifický význam (ISO/IEC 2382-1:1993 „Informační technologie – část I: Základní pojmy“).

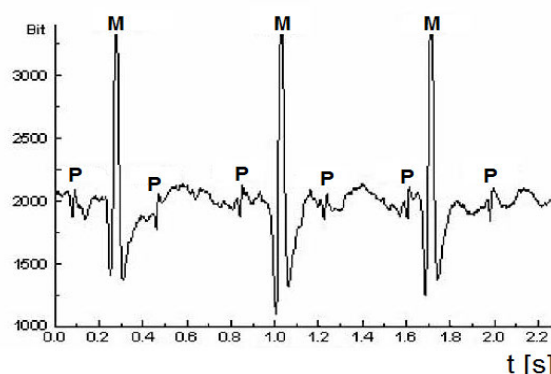
• název pro obsah toho, co se vymění s vnějším světem, když se mu přizpůsobujeme a působíme na něj svým přizpůsobováním. Proces přijímání a využívání informace je procesem našeho přizpůsobování k nahodilostem vnějšího prostředí a aktivního života v tomto prostředí (Wiener);

• poznatek, který omezuje nebo odstraňuje nejistotu týkající se výskytu určitého jevu z dané množiny možných jevů.

¹⁰ **data** (plurál, lat. *datum*) – dar, to co je dáno.

Jistým dalším zobecněním je pojem proces¹¹ (nikoliv náhodný proces, což je terminus technicus používaný ve statistice), který může být reprezentován několika signály vyjadřujícími tutéž veličinu, příp. i veličiny různé. Např. aktivitu mozkových buněk reprezentujeme záznamem elektroencefalografického signálu (EEG), který představuje paralelní záznam elektrického napětí vytvořeného v místech, kde jsou zpravidla na povrchu hlavy umístěny snímací elektrody jako důsledek elektromagnetického pole vytvářeného průchodem lokálních elektrických proudů v a mezi mozkovými neurony. Podle počtu elektrod a způsobu jejich zapojení obsahuje záznam zpravidla 16 až 32 současně snímaných signálů EEG (obr.1.5). Druhým případem, kdy jsou veličiny různé, může být např. proces zdravotní péče v daném zdravotnickém zařízení, charakterizovaný pomocí měsíčně vykázaných údajů o vynaložených finančních prostředcích, počtem ošetřených pacientů, počtem využitých lůžek akutní péče, ...

Informace obsažená v datech, či signálech je strukturovaná, zahrnuje různé složky. Určitě zahrnuje jednak **deterministickou složku**, která jednoznačně souvisí se stavem analyzovaného systému (má-li pacient chřipku, má zvýšenou tělesnou teplotu), jednak **složku náhodnou**, ovlivněnou různými vlivy buď přímo u zdroje (ta zvýšená tělesná teplota je u někoho nižší, u někoho vyšší), nebo způsobenou chybami při měření či přenosu dat (chybná metoda měření, konečná přesnost měřicího zařízení, zdravotní sestra se spletla, když zapisovala teplotu do chorobopisu, ...). Dále deterministická složka může obsahovat informaci, která přímo nesouvisí s cíli analýzy (elektrokardiografický signál snímaný z povrchu těla těhotné ženy obsahuje elektrickou aktivitu srdce matky i plodu - viz obr.1.6 – zajímá-li nás v jakém stavu je dítě před a během porodu, je maternální EKG generované srdcem matky z hlediska dané úlohy složkou minimálně neužitečnou, spíše však parazitní, kterou je třeba odstranit).



Obr.1.6 EKG těhotné ženy – M - záznam projevu depolarizace buněk srdečních komor matky; P - záznam projevu depolarizace buněk srdečních komor plodu

K separaci náhodné a deterministické složky, resp. k výběru „správné“ deterministické složky je třeba nadstavbová **znalost** dalších souvislostí a okolností spojených s řešenou úlohou. Ve výše uvedeném příkladu např. cíl analýzy – analýza stavu plodu před a během porodu, tzn. je potřeba eliminovat fetální EKG od všech ostatních složek signálu. Aby se to podařilo, je třeba určit takové vlastnosti jednotlivých složek signálu, jimiž se navzájem liší. Např. jaké mají všechny ty složky vlastnosti v čase, jaká je jejich velikost, jaké jsou jejich frekvenční vlastnosti? Jsou složky signálu nějakým způsobem vázány, tj. existuje mezi nimi korelace? A když se extrakce fetálního signálu povede, lze pokračovat v určování jeho dalších parametrů, které umožní zhodnotit aktuální stav plodu, např. velikost srdeční frekvence plodu, jak souvisí jeho srdeční frekvence s intenzitou děložních stahů?

Máme-li vhodně pracovat s informací obsaženou v signálu, tzn. analyzovat, resp. syntetizovat, musíme dokázat signál vhodně matematicky popsat, to znamená vytvořit jeho **matematický model**¹². Matematický model signálu by měl být na jedné straně co nejjednodušší (aby

¹¹ proces (lat. *procēssus*, od *procēdere*) - postupovat, táhnout vpřed, což je složenina z předpony *prō-* ve významu „před, pro, za“ a slovního kmene *cēdere* („kráčet, stoupat“). Tedy shrnuto, slovo proces značí postup, pokrok, průběh.

¹² **Matematický model** je matematickými prostředky vyjádřený popis reálného děje, který můžeme považovat za projev chování nějakého daného reálného objektu, resp. systému. Z této formulace vyplývá, že matematického modelování se používá jak pro matematický popis signálů, tak i systémů.

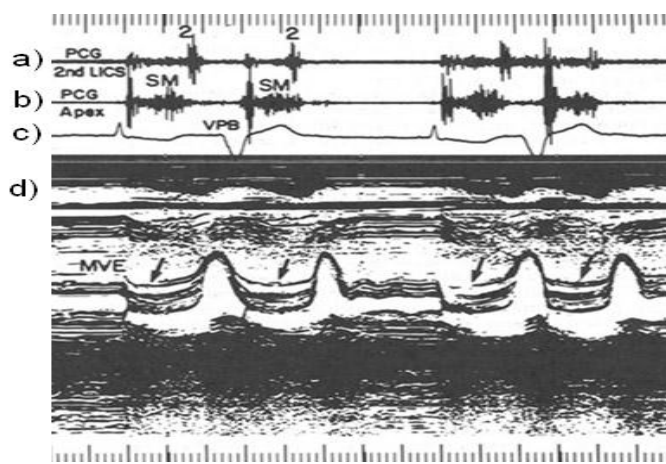
se s ním dobře pracovalo), na druhé straně co nej-
přesnější (aby co nejlépe reprezentoval sledované
děje).

Matematicky lze signál obecně popsat funkcí $x(t)$
pomocí R nezávislých proměnných $t = \{t_1, t_2, \dots, t_R\}$
z oboru O , určeného kartézským součinem dílčích
definičních oborů O_r jednotlivých proměnných t_r .
V případě, že $R = 1$ (hovoříme o jednorozměrných
signálech), bývá nezávisle proměnnou zpravidla čas.
V případě, že $R = 2$, bývají nezávisle proměnnými
většinou prostorové souřadnice. Hovoříme pak o
dvourozměrných signálech, někdy je označujeme
jako 2D signály. Jsou jimi všechny obrazy. Pokud je
 $R > 2$, pak jsou nezávisle proměnné nějakou kombi-
nací času a prostorových souřadnic. Jsou-li tři pro-
měnné prostorové, pak hovoříme o snímku trojdimenzionální scény. Filmový záznam je re-
prezentován časovou sekvencí 2D snímků, tedy se jedná o data se dvěma prostorovými pro-
měnnými spolu s jednou časovou proměnnou.

Obor proměnných t , ve které jsme schopni měřit hodnoty signálu, označíme jako **primární**
(**originální**) **oblast popisu signálu**. Je-li potřeba (např. pro lepší názornost) transformovat
signál z původní primární oblasti popisu na funkci nějaké jiné nezávislé veličiny, pak o vý-
sledku transformace hovoříme jako o reprezentaci signálu v **sekundární oblasti popisu**. To je
například při spektrálním popisu vlastností signálu, což je výsledek transformace původních
dat do tvaru, kdy jsou vlastnosti signálu vyjádřeny pomocí závislosti na frekvenci harmonic-
kých složek, z nichž se původní průběh skládá.



Obr.1.7 Dvourozměrný signál - RTG
snímek paty



Obr.1.8 Paralelní záznam veličin popisujících činnost
srdce – a) a b) fonokardiogram snímáný ve dvou pozicích
na hrudníku; c) signál EKG; d) ultrazvukový M-scan –
vodorovná osa je stejně jako v případě výše znázorněných
signálů časová, vertikální osa popisuje hloubku umístění
jednotlivých struktur v hrudníku (zkratkou MVE a šipkami
je vyznačen pohyb srdeční mitrální chlopně)

prezentujících týž zdrojový proces (obr.1.8). Na základě uvedených poznatků je tedy funkce
 $x(t)$, popisující signál, obecně vektorovou funkcí vektorového argumentu.

Hodnoty signálu, které měříme
na skutečných, reálně existujících
systémech, jsou výhradně reálné.
Takto naměřené hodnoty však mo-
hou být během předzpracování
podrobeny různým operacím, jejichž
výsledkem bývají signály s hodno-
tami jak reálnými, tak i komplexní-
mi. Proto, i když případy, kdy signál
nabývá komplexních hodnot, jsou
v praxi nesrovnatelně méně časté,
měly by být matematické funkce
modelující signál obecně schopny
vyjádřit i komplexní závislosti.

Komplexní signál se skládá ze
dvou navzájem nezávislých složek -
reálné a imaginární nebo modulové a
fázové, je tedy speciálním příkladem
vícesložkového či **vícekanálového**
signálu, který se obecně skládá
z K různých průběhů, zpravidla re-

Použité matematické prostředky budou nepochybně závislé na charakteru zpracovávaného signálu. Z pojmů, které jsme až dosud uvedli, či alespoň naznačili, jsou pro rozhodnutí o výběru matematických prostředků pro popis dat důležité zejména:

a) *determinovanost průběhu*

Je-li průběh funkce $x(t)$ popisující signál jednoznačně určen pro jakoukoliv přípustnou hodnotu argumentu t , tj. je možné vždy předem stanovit, jaké okamžité hodnoty nabude signál v libovolném bodě definičního oboru, pak nazýváme **signál deterministický**. Modelem takového signálu je deterministická matematická funkce, např. $x(t) = 5\cos(\omega t + \pi)$, kde ω je úhlová frekvence.

Nejsou-li, naopak, hodnoty signálu pro libovolnou hodnotu argumentu jednoznačné, hovoříme o **signálu nedeterministickém**, příp. **náhodném**. Náhodný signál je jednou z možných realizací náhodného procesu $\xi(t)$, který vyjadřuje celkové vlastnosti chování zdroje signálu. Náhodný proces i náhodný signál jsme schopni popsat pouze jejich pravděpodobnostními charakteristikami. Není to však jediná možnost jak popsat nedeterministický průběh signálu, alternativou může být popis např. pomocí teorie mlhavých (fuzzy) množin a fuzzy logiky.

b) *spojitost či diskrétnost nezávislých veličin*

Podle charakteru definičního oboru argumentů signálu budeme nadále rozlišovat signály spojité a diskrétní, v případě více rozměrů může být jejich charakter i kombinovaný.

Pokud je definičním oborem O souvislá R rozměrná oblast, hovoříme o **signálu spojitém** v oboru argumentů, který budeme značit $x_s(t)$ – viz např. výše uvedená harmonická funkce $x_s(t) = 5\cos(\omega t + \pi)$.

Skládá-li se ale definiční obor argumentů z izolovaných intervalů (bodů) této oblasti, nazýváme signál **signálem diskrétním** v oboru argumentů. Diskrétní signál a jeho parametry budeme označovat indexem d (např. $x_d(t)$), případně později, kdy už nebude hrozit nebezpečí záměny se symbolikou spojitých signálů, budeme používat symbolů bez jakéhokoliv označení. Body diskrétního oboru argumentů tvoří v drtivé většině případů pravidelnou síť, není to však nezbytnou podmínkou. Diskrétnost nezávislých proměnných může vyplývat buď z podstaty procesu (viz příklad podle obr.1.2), nebo v čase diskrétní reprezentace může vzniknout vzorkováním původně spojitě veličiny (obr.1.4). Modelem pravidelně vzorkovaného diskrétního signálu může být posloupnost daná funkčním předpisem $x_d(nT_{vz}) = x_f(n) = 2\cos(\omega nT_{vz} + \pi/2)$, kde T_{vz} je tzv. **vzorkovací perioda** (čas mezi každými dvěma vzorky) a celé číslo n určuje pořadí vzorku. Jinou formou popisu diskrétní veličiny může být posloupnost hodnot dané veličiny v určitých časových okamžicích – **časová řada**. Pojmy časová řada a v čase diskrétní signál znamenají v podstatě totéž, jejich použití se liší pouze dle zvyklostí té které aplikace – pojem časová řada se používá zejména ve statistice, ekonomice, nebo epidemiologii, pojem číslicový signál spíše v technických aplikacích, nebo třeba i ve fyziologii.

Analyzované veličiny mohou být diskrétní i z hlediska svých funkčních hodnot. Vzhledem k cílům tohoto textu ale tato skutečnost nebude nadále podstatná. Budeme nadále uvažovat veličiny, jejichž funkční hodnoty jsou z celého intervalu reálných čísel.

c) *periodičnost*

Když se pro libovolnou nezávisle proměnnou $t_r \in t$ průběh deterministického signálu opakuje tak, že platí

$$x(t_r) = x(t_r + k.T_r), \quad (1.1)$$

pro libovolné celé k , je **signál periodický** vzhledem k proměnné t_r a T_r je jeho **perioda**¹³. Je-li třeba, můžeme každý neperiodický signál, deterministický i nedeterministický, považovat za periodický s periodou $T_r \rightarrow \infty$.

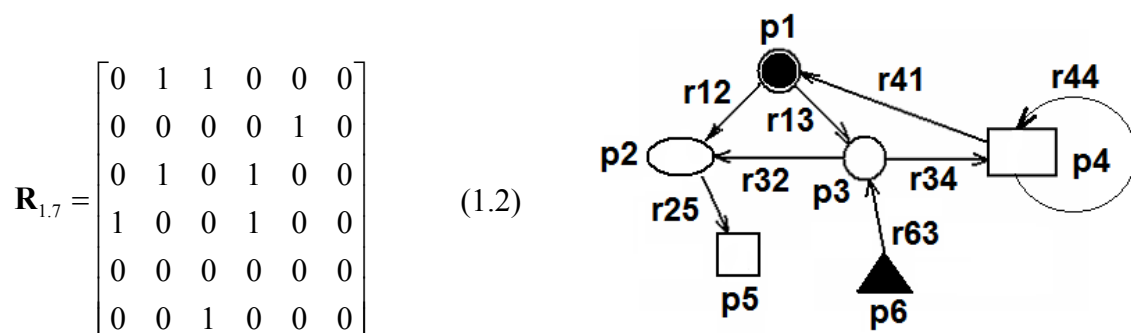
Některé biologické či fyziologické procesy mají rytmický, téměř pravidelně se opakující průběh, že je lze, za jistých zjednodušujících předpokladů, považovat za periodické. Takové jsou např. signály odvozené od srdeční aktivity, částečně i z dýchání, procesy vázané na denní, příp. roční cyklus. Abychom zdůraznili odlišnost od přesné periodicity mnohých signálů technického původu, hovoříme v tomto případě o **signálech repetičních**. Naopak, jiné signály mají natolik nepravidelný charakter, že k nim lze přistupovat jako k signálům náhodným – elektrická aktivita kosterních svalů – elektromyogram (EMG) nebo spontánní EEG (obr.1.5). Jako protiklad výše zmíněných repetičních signálů je nazýváme **nerepetiční**.

1.3.2 Systém

V podstatě ekvivalentní definici definici uvedené v pozn. 8 na str. 5 v o poznání formálnější podání zní:

Systém $S = \{P, R\}$ kde P je neprázdňá konečná množina a R je neprázdňá množina relací definovaných na P , přičemž obě množiny společně určují vlastnosti a chování celku.

Konkrétní uspořádání prvků a vazeb systému určuje jeho vnitřní **strukturu** (viz obr.1.9). Kromě grafického vyjádření lze strukturu formálně vyjádřit čtvercovou relační maticí. V příkladu podle obr.1.9 je relační matice (bez podrobnějšího popisu vlastností jednotlivých prvků a dalšího kvantitativního rozlišení jednotlivých relací).



Obr.1.9 Příklad struktury systému

Prvky systému jsou základní součástí systému, které jsou na dané rozlišovací úrovni nedělitelné. Neznamená to, že by na jiné úrovni rozlišení nemohl mít prvek velice složitou strukturu.

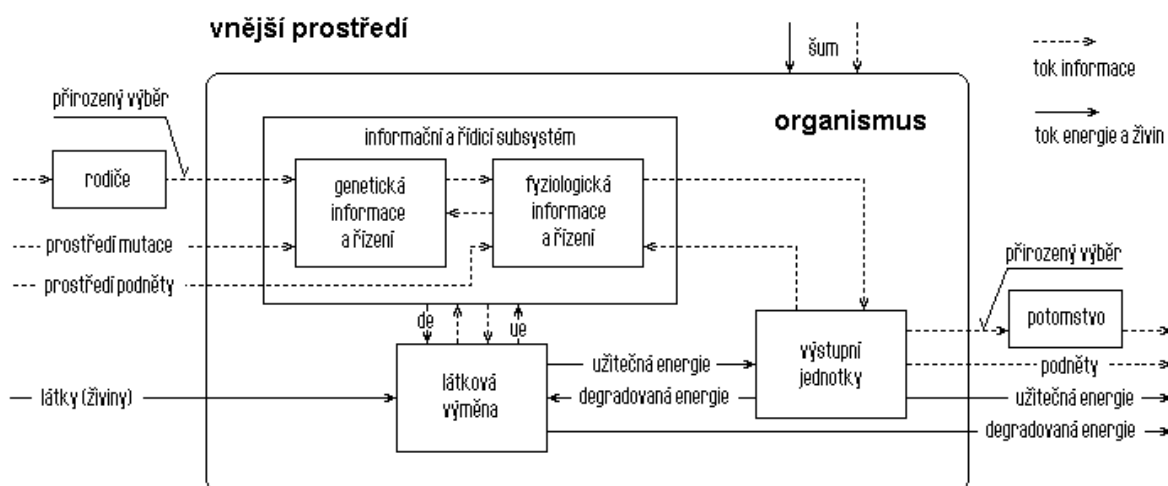
V příkladu podle obr.1.10 se na dané úrovni dělí lidský organismus na tři základní elementární části (prvky) – informační a řídicí subsystém a subsystémy látkové výměny a výstupních jednotek, i když je samozřejmé, že každý z uvedených prvků (subsystémů) se reálně skládá z dalších dílčích částí, jak je naznačeno v případě informačního a řídicího subsystému, který lze členit minimálně na genetický a fyziologický subsystém. Fyziologický dále na nervovou a endokrinní soustavu, nervová na centrální a periferní, atd. Na úrovni, která je daná cíli analýzy, však zřejmě stačí základní skladba obsahující tři prvky.

Prvky popisujeme veličinami, které definují jejich stav, případně dalšími pomocnými veličinami. Stavové veličiny jsou ty, které jednoznačně definují chování prvku i systému. Jsou to veličiny, které popisují kumulační procesy uvnitř systému. Počet stavových veličin určuje **řád systému**. **Stav** prvku, ale i systému je dán okamžitými hodnotami stavových veličin v daném časovém okamžiku. Podle vývoje hodnot stavu lze dělit systémy na **statické systémy** (nevyka-

¹³ **perioda** (řec. περίοδος) - chození dokola

zují změnu vzhledem k nezávisle proměnné) a **dynamické systémy**. **Chování** systému je určeno vnějšími projevy systému a je důsledkem dynamiky systému, tj. schopnosti vyvolat změnu v systému, především jeho stavu.

Vazby jsou reprezentovány vztahy mezi prvky systému, případně mezi prvky systému a jeho okolí. Vazby mohou být energetické (hmotné) a informační (nehmotné). Ovšem vzhledem k tomu, co již víme o podstatě signálů, i informační vazba musí být samozřejmě reprezentována přenosem pomocí nějaké materiální veličiny. Formálně jednotlivé vazby vyjadřujeme matematickými vztahy mezi veličinami popisujícími stav prvků, přičemž závislost či nezávislost proměnných použitých ve vazebních vztazích je dána orientací vazebních relací.



Obr.1.10 Lidský organismus jako systém

Okolí systému je tvořeno prvky, které nepatří do systému, ale jsou s prvky systému svázány. Systém a jeho okolí jsou jednak objektivní skutečností, jednak i důsledkem subjektivních požadavků na obsah, formu a účel zkoumání. Např. při zkoumání stavu životního prostředí v určité lokalitě je otázka, zda zdroje znečištění zahrneme do systému, či je budeme zkoumat odděleně a jejich působení budeme považovat za vstupy systému analyzované lokality. S podobnou situací se lze setkat při teoretické analýze matematických systémů. Zahrnutí vstupů do systému analytické postupy zjednoduší.

Veličiny (vazby), které zprostředkovávají vliv okolí na systém, jsou **vstupy systému** a vnější projevy (vazby) systému, které reprezentují jeho vliv na okolí, jsou **výstupy systému**. Prvek systému, který má vazbu na okolí (vstupní nebo výstupní nebo vstupní i výstupní) nazýváme **hraničním prvkem systému** a množinu všech hraničních prvků nazýváme **hranici systému**.

Ve vztahu k okolí rozeznáváme systémy otevřené a uzavřené (konzervativní). **Otevřený (neautonomní) systém** je takový, u něhož dochází k energetické či informační výměně s jeho okolím. **Uzavřený (konzervativní, autonomní) systém** je naopak od svého okolí izolován. Z praktického hlediska, abychom v případě jeho analýzy dokázali zjistit (změřit) jeho okamžitý stav, připouštíme existenci výstupních informačních vazeb.

To, zda můžeme okolí do daného systému zahrnout či nikoliv, řeší tzv. **podmínka separability systému**. Systém je separabilní, jestliže jeho výstupy zpětně vlivem prostředí podstatně neovlivňují vstupy.

Důležitou vlastností systému je jeho **stabilita**¹⁴. Obecně ji můžeme definovat jako schopnost systému udržovat si při změně vstupů a stavů svých prvků nezměněnou vnější formu

¹⁴ **stabilita** (lat. *stabilitas*, ze *stabilis* - stálý, ustálený, pevný vytrvalý) - pevnost, vytrvalost, stálost, , ...

(chování) i navzdory třeba i velice bouřlivým procesům probíhajícím uvnitř systému nebo jako schopnost systému vrátit se do původního stavu po nepřiliš velkém vychýlení.

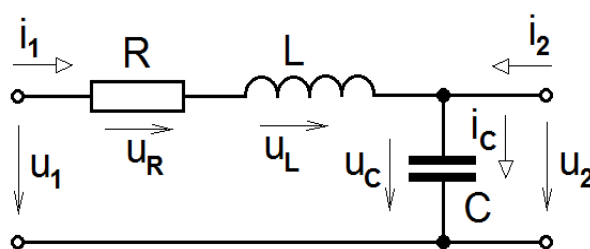
Máme-li se systémy vhodně pracovat, tj. analyzovat jejich vlastnosti, resp. syntetizovat (navrhovat jejich strukturu na základě určitých požadavků), je potřeba, podobně jako v případě signálů, umět vytvořit jejich vhodný matematický popis/model. Definice na začátku této kapitoly je určitě matematictější než definice v pozn. 8, nicméně stále není dostatečně užitečná pro praktické úlohy. Mohli bychom se samozřejmě již zde zabývat další konkretizací uvedené definice pro konkrétní situace, nechme to ale na později uvedené, specifičtější zaměřené kapitoly. Zde pouze uvedme, že matematické prostředky pro popis systémů se mohou lišit podle:

- **typu časové základny** (spojitá, diskrétní, na čase nezávislá);
- formálně i **charakteru proměnných**, se kterými systém pracuje (spojité, diskrétní, logické, nominální, ordinální) – z hlediska obsahu tohoto textu se v dalším budeme zabývat pouze kvantitativními proměnnými, přičemž není podstatných rozdílů mezi zpracováním proměnných se spojitým či diskrétním funkčním oborem;
- **vztahu k okolí** (autonomní, neautonomní);
- **proměnnosti parametru**¹⁵ (lineární, nelineární, časově proměnné);
- **vztahu k minulosti** (bez paměti, s pamětí);
- **determinovanosti proměnných a parametrů** (deterministické, nedeterministické – náhodné, fuzzy, ...);
- **požadavků na znalost vnitřní struktury systému** (vnější, resp. vstupní/výstupní popis, stavový popis).

Příklad:

Elektrický obvod, jehož schéma je uvedeno na obr.1.11, lze považovat (s použitím elektromechanických ekvivalencí) za fyzikální model cévního segmentu. Odpor R vyjadřuje síly, kterými cévní stěny a viskozita krve působí proti pohybu krve, cívka (induktor) s indukčností L reprezentuje setrvačnost krevní hmoty a kondenzátor, jako akumulací prvek elektrického náboje, nahrazuje objemovou kapacitu cévy

s tím, že kapacita C v podstatě vyjadřuje objemovou roztlačnost (komplianci) cévy: $C = \Delta V / \Delta P$ – změna objemu cévy vyvolaná změnou krevního tlaku. Uvedená napětí u_p ($p = 1, 2, R, L, C$) ve schématu vyjadřují tlakové poměry v dané cévě, proudy i_p průtok krve cévou. Tento systém má tři prvky – odpor, cívku, kondenzátor, jejichž vlastnosti popisují parametry R , L a C a okamžitý stav každého z uvedených tří prvků je vyjádřen okamžitými hodnotami napětí a proudu těmito prvky – $u_R(t)$, $i_R(t)$, $u_L(t)$, $i_L(t)$, $u_C(t)$ a $i_C(t)$ (všechny tyto uvedené veličiny jsou samozřejmě funkcemi času, jehož definiční interval tvoří celá reálná osa, tzn. že všechny veličiny jsou definovány ve spojitém čase). Kontakt na okolí je vyjádřen prostřednictvím vstupního napětí $u_1(t)$ a proudu $i_1(t)$ (krevního tlaku na začátku cévy a průtoku krve do ní z předcházejícího segmentu) a výstupního napětí $u_2(t)$ a proudu $i_2(t)$ (krevního



Obr.1.11 Pasivní sériový RLC obvod jako elektrický model cévního segmentu

¹⁵ **parametr** - slovo vycházející z řečtiny spojením předpony $\pi\alpha\pi\alpha$ - s významem kromě, mimo, při a slovního kmene $\mu\eta\tau\rho\omega\nu$ – míra. Původně používané v geometrii, ve 20. letech minulého století se začátky systémové teorie získalo význam „měřitelný faktor, umožňující definovat daný systém“, případně „hranice“ či „limit“ tak, jak tento pojem vnímáme v současnosti. Tedy, parametry, na rozdíl od proměnných, které slouží k popisu stavu prvků, popisují základní vlastnosti či charakteristiky prvků a vazeb systému.

tlaku na konci segmentu a průtoku krve ven; orientace proudové šipky na výstupu segmentu je pouze formální, v případě očekávaného výtoku krve z cévy ven bude mít vypočítaná hodnota proudu v tomto případě záporné znaménko).

Matematickým modelem vazeb mezi jednotlivými prvky a veličinami, které je popisují, mohou být následujícími vztahy:

- pro napětí a proud odporem platí Ohmův¹⁶ zákon

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t); \quad (1.3)$$

- pro proud cívku a indukované napětí je

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau; \quad (1.4)$$

- pro proud a napětí na kondenzátoru (srvn. definici stažlivosti, resp. compliance)

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau. \quad (1.5)$$

Dále platí 1. Kirchhoffův¹⁷ zákon (algebraický součet proudů v uzlu je roven nule), proto dle formalizmů uvedených v schématu

$$i_C(t) = i_1(t) + i_2(t) \quad (1.6)$$

a 2. Kirchhoffův zákon (algebraický součet napětí ve smyčce je roven nule), je

$$u_1(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) \quad (1.7)$$

a

$$u_2(t) = u_C(t).$$

Konečně, vzhledem k tomu, že se vstupní větev obsahující odpor i cívku nedělí (v případě rozpojeného výstupu – tzv. výstupu naprázdno), musí být

$$i_1(t) = i_R(t) = i_L(t). \quad (1.8)$$

Protože kumulační charakter mají dle definičních vztahů (1.4) a (1.5) proud cívku i_L a napětí na kondenzátoru u_C , budeme je považovat za stavové veličiny (jak později uvidíme, opravdu lze z jejich hodnot spočítat hodnoty všech ostatních zde uvedených veličin). Protože počet stavových veličin určuje řád systému, je analyzovaný systém 2. řádu.

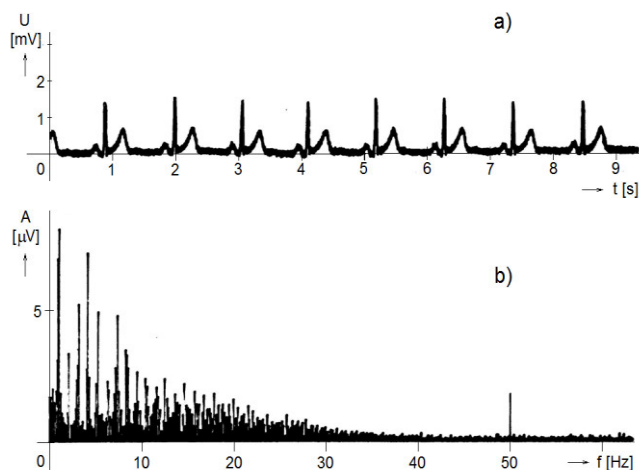
□□□

1.4 Časové řady – co s nimi

Úlohy, které s časovými řadami řešíme, spadají jako mnohé jiné, do dvou základních kategorií – analýzy jejich vlastností a syntézy jejich matematických modelů. Zpravidla úlohy obou typů velice úzce souvisejí.

¹⁶ **Georg Simon Ohm** (*1789, Erlangen, Bavorsko; +1854, Mnichov) - německý fyzik; jeden ze základních zákonů nejen elektrotechniky, definující vztah mezi napětím a proudem v elektrickém obvodu zformuloval tak jednoduše, že ho německá vědecká komunita té doby naprosto nebrala vážně a vzala ho na vědomí, až když ho v roce 1841 britská Královská společnost vyznamenala za výsledky jeho vědecké práce.

¹⁷ **Gustav Robert Kirchhoff** (*1824, Königsberg, Prusko, nyní Kaliningrad, Rusko; +1887, Berlín) - německý fyzik, který se zabýval především elektřinou a spektroskopií. Jeho učitelem byl Carl Friedrich Gauss.



Obr.1.12 Časový průběh (a) a frekvenční spektrum (b) signálu EKG ovlivněného síťovým rušením. Rušení se v časové závislosti projevuje rozšířením stopy záznamu, ve frekvenčním spektru výraznou čarou na frekvenci 50 Hz.

Analýza

Rozklad na základní složky řady a případně navazující separace jednotlivých komponent je základní činností související se zpracováním jakékoliv časové řady. Rozklad může vycházet ze znalosti procesů, které se podílejí na vzniku dané časové řady, nebo je založen na teoretických výchozích předpokladech o jejích vlastnostech.

Příkladem prvního z uvedených postupů může být zpracování signálu EKG, snímaného buď v klidu, nebo při zátěži – přirozené nebo uměle vyvolané. Cílem analýzy je zpravidla diagnostický výrok o kvalitě činnosti srdce vyšetřované osoby. K tomu, aby se toho dosáhlo, je potřeba původně spojitě snímané elektrické napětí vzorkováním převést na jeho diskretní verzi (časovou řadu) a

v diskretizovaných datech oddělit složku, která nese užitečnou informaci z hlediska tvorby diagnostického výroku, od komponent rušivých, parazitních. Ty, v závislosti na podmínkách vyšetření, mohou vznikat např. jako důsledek indukce síťového napětí (obr.1.12), procesů na rozhraní pokožka – snímací elektroda, vlivem dýchání či jiných pohybů pacienta. Vlastnosti rušení i užitečné složky jsou jak v časové, tak i frekvenční oblasti dostatečně známy (na základě experimentálních i teoretických znalostí) a byla vytvořena řada různých algoritmů pro separaci obou signálových komponent. Algoritmy využívají principů lineární frekvenční filtrace, statistických vlastností obou složek při zprůměrování, či jiných sofistikovanějších postupů využívajících různých transformací, jako je např. vlnková transformace, zpracování pomocí neuronových sítí, apod.

Jiná situace je, pokud analýza nevychází z apriorní informace o vlastnostech jednotlivých komponent časové řady. Cílem analýzy je v tom případě odhalit jednotlivé dílčí procesy, které utvářejí výslednou časovou řadu a zjistit jejich dílčí vliv na finální průběh řady. Způsob separace pak vychází ze dvou základních modelů struktury časové řady – aditivního a multiplikativního. V případě prvního z obou uvedených modelů platí předpoklad, že hodnoty vzorků časové řady jsou dány součtem

$$x(kT_{vz}) = r(kT_{vz}) + z(kT_{vz}) + s(kT_{vz}) + v(kT_{vz}), \quad (1.9)$$

v případě multiplikativního modelu součinem

$$x(kT_{vz}) = r(kT_{vz}) \cdot z(kT_{vz}) \cdot s(kT_{vz}) \cdot v(kT_{vz}), \quad (1.10)$$

kde $r(kT_{vz})$ reprezentuje k -tý vzorek (monotónní) posloupnosti času označované jako trend, $z(kT_{vz})$ popisuje nenáhodné dlouhodobé oscilační procesy s periodou významně delší než je doba sledování časové řady, $s(kT_{vz})$ vyjadřuje hodnoty deterministické periodické, tzv. sezónní složky a konečně $v(kT_{vz})$ představuje náhodnou šumovou složku, která zohledňuje všechny odchylky vzorků časové řady od průběhu deterministické části modelu dané prvními třemi, výše uvedenými složkami časové řady. Zpravidla se očekává, že náhodná složka $v(kT_{vz})$ časové řady reprezentuje tzv. bílý šum s normálním rozdělením a nulovou střední hodnotou. Mezi oběma krajními případy modelů mohou existovat různé smíšené aditivně-multiplikativní přístupy, sezónní složka může být násobná a vyvolána různými procesy. V některých přípa-

dech se trendová složka a složka dlouhodobých oscilací spojuje v složku označovanou jako drift

$$d(kT_{vz}) = r(kT_{vz}) + z(kT_{vz}). \quad (1.11)$$

Jednoduché pravidlo pro rozhodnutí, který z obou základních modelů použít, vychází z toho, zda rozkmit periodické sezónní složky závisí na okamžité hodnotě trendu. Zatímco velikost oscilací, pokud existují, v situaci zobrazené na obr.1.1 nezávisí na velikosti trendové složky (lze použít aditivní model), hodnoty rozkmitu sezónních oscilací popisující incidenci a mortalitu nádorového onemocnění na obr.1.2b zjevně na velikosti hodnot trendu závisí, což vede k úvahám o použití multiplikativního modelu.

Cílem analýzy v tomto případě je rozlišit jednotlivé dílčí složky, vzájemně je separovat a poté zabývat se příčinami jejich vzniku i formami jejich vzájemných závislostí.

Syntéza

Vytvoření matematického modelu časové řady rovněž přispívá k schopnosti porozumět příčinám jejího vzniku, ale s vytvořeným modelem i odhadovat (predikovat) její průběh vně intervalu, ve kterém známe její hodnoty – do budoucna, příp. i do minulosti, pokud je tato úloha zajímavá. Možná je i klasifikace jednotlivých složek řady založená na hodnotách parametrů odpovídajících modelů.

Metodika tvorby modelů může být založena na znalosti podstaty procesů, které přispívají ke vzniku časové řady (tento přístup často vede do sféry nelineárních soustav), nebo může využívat postupy bez apriorní informace. V tom případě se metody podle použitých matematických nástrojů dělí na dvě základní skupiny – metody využívající regresní modely a metody založené na aplikaci teorie lineárních dynamických soustav buď s konstantními parametry, např. podle metodiky Boxe a Jenkinse, nebo s časově proměnnými parametry pomocí různých variant adaptivních systémů. Zatímco regresní modely mají zejména význam pro popis sledovaných jevů, dynamické soustavy umožní lépe nahlédnout i do jejich podstaty.

2 Signály spojité v čase

2.1 Věty na úvod

Jak bylo uvedeno v předchozí kapitole, charakter matematických modelů signálů (funkcí, posloupností) závisí jednak na vlastnostech zpracovávaných signálů, jednak na cílech zpracování.

Změřená data, která stojí za zpracování, vždy obsahují směs deterministické a náhodné složky. Jakákoliv metoda zpracování dat se snaží eliminovat náhodné fluktuace a zdůraznit složku, deterministicky související s analyzovanými procesy, které jsou zdrojem dat (zvýšená teplota organismu vyvolaná aktivitou imunitního systému, výskyt kardiovaskulárních onemocnění jako důsledek životního stylu, ...). Tato skutečnost předurčuje význam, který v tomto textu nadále přiznáváme deterministickým modelům signálu.

Třída deterministických funkcí se dále, především z hlediska teoretických přístupů a možností navazující analýzy, dělí na funkce periodické a neperiodické, resp. jednorázové.

Navzdory faktu, že v současné době dominantní většina experimentálních dat vyjadřujících časovou závislost sledovaných veličin je diskrétních (buď ze své vlastní podstaty, nebo důsledkem vzorkování původně spojitých veličin), některé základní principy a jejich důsledky jsou srozumitelnější pro spojitou reprezentaci dat. Z tohoto důvodu vidíme jako vhodnější zabývat se oběma případy – spojitými i diskrétními modely a těmi dříve uvedenými dříve.

Důležitá poznámka

Budeme-li nadále hovořit o spojitých a diskrétních signálech, veličinách a funkcích, budeme tím rozumět, až na případně explicitně uvedené výjimky, spojitost či diskrétnost času jako nezávisle proměnné, nikoliv spojitost či diskrétnost z hlediska funkčních hodnot. Nepochybně se tak dopouštíme, z matematického pohledu neodpustitelného prohřešku, ale domníváme se, že z pragmatického pohledu cílů tohoto textu je takto definované dělení dostačující. Abychom si pověst zas až tak nezkazili, budeme tuto skutečnost připomínat alespoň v názvech hlavních kapitol.

Co bychom v následujících kapitolách chtěli

Především bychom chtěli, aby byl čtenář po přečtení první z následujících kapitol seznámen se základními principy tvorby modelů v čase spojitých signálů, aby věděl, co je to harmonický signál a jaké různé způsoby jeho popisu se používají (a budou použity v následujících kapitolách), věděl o nejdůležitějších jednorázových signálech, tj. jednotkovém impulzu a skoku. V další kapitole by se měl seznámit se základními operacemi se signály, zejména rozumět pojmům konvoluce a korelace, resp. korelační funkce. Tyto základy by pak měly být podkladem pro pochopení vyjádření vlastností v čase spojitých signálů ve frekvenční doméně, tj. pomocí frekvenčního spektra. Měl by rozumět rozdílům mezi frekvenčními transformacemi periodických a neperiodických signálů a vlastnostmi tomu odpovídajících spekter.

Snad to není moc a snad se to povede.

2.2 Základní typy matematických modelů signálů spojitých v čase

2.2.1 Periodické funkce

V duchu obecné definice více-rozměrného periodického signálu podle vztahu (1.1) můžeme jedno-rozměrný periodický signál (funkci) definovat následovně.

Definice:

Spojitéj jedno-rozměrná funkce $x_s(t)$ je periodická, když existuje takové číslo $T > 0$, pro které a pro všechny reálné hodnoty t je

$$x_s(t) = x_s(t + kT), \quad (2.1)$$

kde k je libovolné celé číslo. Nejmenší hodnotu T (pokud taková hodnota existuje), pro kterou platí rovnice (2.1) nazýváme **základní periodou** signálu (funkce). □□□

Příklad:

Příkladem periodické funkce může být obdélníkový pulz definovaný vztahy (obr.2.1)

$$x_s(t) = \begin{cases} 5, & \text{pro } t \in \langle 0,5 \cdot k; 0,2 + 0,5 \cdot k \rangle \text{ [s];} \\ 0, & \text{pro } t \in \langle 0,2 + 0,5 \cdot k; 0,5 \cdot (k+1) \rangle \text{ [s],} \end{cases} \quad (2.2)$$

pro $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Jeho základní perioda je 0,5 s. □□□

Harmonická funkce

Je jednou ze základních periodických funkcí. Popisujeme ji pomocí goniometrické funkce $\sin(x)$ nebo $\cos(x)$ ¹⁸. Vzhledem k dalším souvislostem je třeba rozhodnout o jedné z obou funkcí jako referenční. Proto rozhodneme (jsou pro to i některé dost dobré důvody, se kterými se seznámíme později), že nadále budeme považovat za referenční harmonickou funkci definovanou vztahem

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.3)$$

kde A je kladná reálná konstanta, kterou nazýváme **amplitudou**¹⁹ harmonického signálu (udáváme ji v jednotkách veličiny, kterou harmonická funkce popisuje), ω je rovněž kladná reálná konstanta, kterou označujeme jako **úhlový** (kruhový) **kmitočet** (frekvence²⁰) (měříme jej v rad/s) a φ_0 je reálná konstanta, která určuje posunutí průběhu harmonické funkce vůči počátku, tj. pro okamžik $t = 0$. Nazýváme ji **počáteční fáze** a uvádíme ji v úhlových mírách – v radiánech, resp. v úhlových stupních. Argument funkce určuje hodnotu fáze harmonického signálu. Základní perioda harmonické funkce je dána vztahem (je-li ω v radiánech)

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2.4)$$

¹⁸ Název funkce sinus procházel s vývojem astronomie a matematiky dle teritoria zájmu (Arábie, Indie, ...) až k arabskému *džaiib*, což znamenalo řadra, výstřih, vypuklost, atd. Tento význam pak ve 12. století v podstatě převzala latina, kde slovo *sinus* značí záhyb, oblouk, ohyb, zákrut, ale i splav, případně dutina.

¹⁹ **amplituda** (lat. *amplitudo*) – rozsáhlost, rozpětí, velikost, znamenitost, důstojnost

²⁰ **frekvence** (lat. *frequentia*) – hojný počet, četný dav, velká účast, zástup, hojnost, množství, četnost; ve fyzice se toto slovo začalo používat pro označení četnosti výskytu (počet výskytů určitého jevu za časovou jednotku) od 1. pol. 19. stol.

Se základní periodou i základním úhlovým kmitočtem souvisí **kmitočet** harmonické funkce f , pro který je

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (2.5)$$

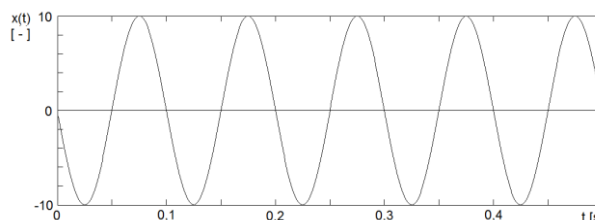
a který v jednotkách SI udáváme v [Hz] s fyzikálním rozměrem [s^{-1}].

Příklad:

Příkladem harmonické funkce je průběh zobrazený na obr.2.2 a definovaný vztahem

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2). \quad (2.6)$$

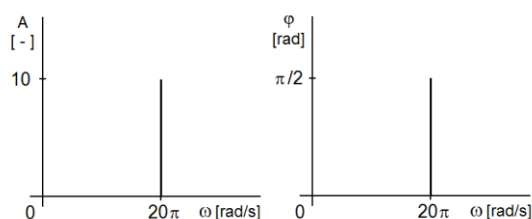
Amplituda je v tomto případě rovna $A = 10$ (je určena maximální výchylkou harmonického průběhu), základní úhlový kmitočet je $2 \cdot 10 \cdot \pi$ [$\text{rad} \cdot s^{-1}$], kmitočet 10 Hz a počáteční fáze $\varphi_0 = \pi/2$ [rad].



Obr.2.2 Příklad harmonického signálu podle vztahu (2.6)

□□□

Jak plyne z definičního vztahu (2.3), je průběh harmonické funkce pro všechny hodnoty času jednoznačně určen hodnotami tří parametrů - amplitudy A , úhlového kmitočtu ω_z a počáteční fáze φ_0 . Mohli bychom tedy její vlastnosti vyjádřit, kromě časového průběhu i graficky vzájemnou závislostí těchto parametrů, zpravidla vyjádřenou ve dvou rovinách – jednak v rovině amplituda vs. úhlový kmitočet (resp. kmitočet), jednak v rovině počáteční fáze vs. úhlový kmitočet (resp. kmitočet).



Obr.2.3 Grafické vyjádření závislosti (a) amplitudy a (b) počáteční fáze na úhlové frekvenci harmonické funkce podle vztahu (2.6)

ních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

Kromě definičního vztahu harmonické funkce podle (2.3) ji lze popsat ještě i jinými způsoby, které vyplývají z Eulerových²² vztahů²³

Uvidíme dále, že tento koncept zobrazení vlastností (harmonické) funkce v závislosti na jejím kmitočtu využijeme pro znázornění **spektra**²¹ **funkce (signálu)**. Pro funkci definovanou vztahem (2.6) a zobrazenou na obr.2.2 je spektrum vyobrazeno na obr.2.3.

Pro další si tedy zatím pamatujme, že **frekvenční spektrum funkce (signálu) je vyjádření rozložení amplitud a počátečních**

²¹ **spektrum** (lat. *spectrum*) – obraz, objevení, zjevení (se), vzhled; poprvé použito pro výsledek optického rozkladu světla kolem r.1670.

²² **Leonhard Paul Euler** (*1707 Basilej, Švýcarsko; +1783 Petrohrad, Rusko) švýcarský matematik a fyzik, který je považován za nejlepšího matematika 18. století a za jednoho z nejlepších matematiků vůbec. Významně přispěl k řešení otázek diferenciálního počtu, přispěl k základům teorie grafů, mechaniky, optiky, astronomie. Je po něm pojmenován asteroid, byl zobrazen na švýcarských bankovkách, 24. května je dokonce připomínán v luteránském kalendáři svatých.

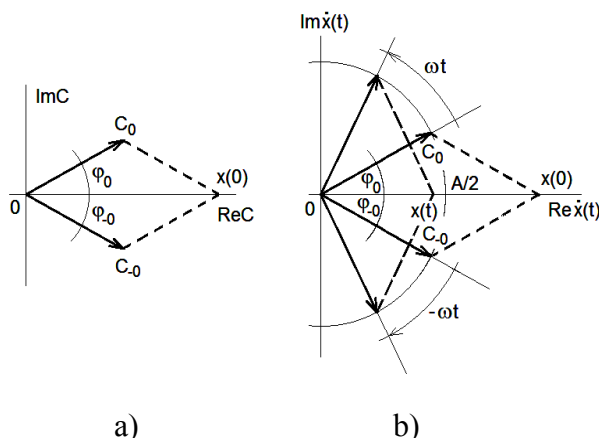
²³ V matematických textech je zvykem pro vyjádření imaginární jednotky používat písmeno i . Teorie signálů a systémů je však dominantně považována za elektrotechnickou disciplínu, kde se téhož symbolu (i) používá k označení jedné ze základních elektrotechnických veličin a to okamžité hodnoty elektrického proudu. Proto se v publikacích zabývajících se problematikou zpracování signálů používá k označení komplexní jednotky symbolu j . Budeme se držet této symboliky navzdory skutečnosti, že tyto texty jsou určeny především pro čtenáře s matematickým vzděláním a doufáme, že tato maličkost jim nezpůsobí závažné trauma.

$$\cos \alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \quad (2.7)$$

a

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}.$$

Tohoto přístupu se obvykle využívá vzhledem k (za určitých okolností) snadnějším výpočtům s komplexní exponenciální funkcí $e^{j\alpha}$ než s tradičními goniometrickými funkcemi $\sin \alpha$ a $\cos \alpha$.



Obr.2.4 a) Komplexní amplitudy exponenciálních složek harmonického signálu; b) časová dynamika exponenciálních složek harmonického signálu

Vynásobíme-li první rovnici dvěma a druhou rovnici $2j$, pak po sečtení výsledků dostáváme výraz

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha. \quad (2.8)$$

Znamená to, že průběh harmonické funkce definované vztahem (2.3) lze vyjádřit též jako reálnou složku průběhu komplexní funkce $e^{j\alpha}$ a tedy je

$$x(t) = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}, \quad (2.9)$$

což odpovídá průmětu kruhového pohybu reprezentovaného pohybem vrcholu vektoru $A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]$ v komplexní rovině na reálnou osu.

Protože funkce \cos je sudá, pak platí i

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\dot{x}(t)\} = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]\} = \operatorname{Re}\{A \cdot \exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \operatorname{Re}\{\dot{x}^*(t)\}, \quad (2.10)$$

kde $\dot{x}^*(t)$ je komplexně sdružená hodnota k $\dot{x}(t)$ ²⁴. Tímto vztahem je zaveden záporný úhlový kmitočet, který lze geometricky interpretovat (fyzikální interpretace se hledá těžko) pomocí úhlové rychlosti otáčení vektoru $A \cdot \exp[j(-\omega t - \varphi_0)]$ v opačném směru (ve směru hodinových ručiček) než v případě vektoru $A \cdot \exp[j(\omega t + \varphi_0)]$.

Ze vztahu (2.7) pro $\cos(\bullet)$ máme

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot \{A \cdot \exp(j\varphi_0) \cdot \exp(j\omega t)\} + \frac{1}{2} \cdot \{A \cdot \exp(-j\varphi_0) \cdot \exp(-j\omega t)\}. \quad (2.11)$$

Označíme-li

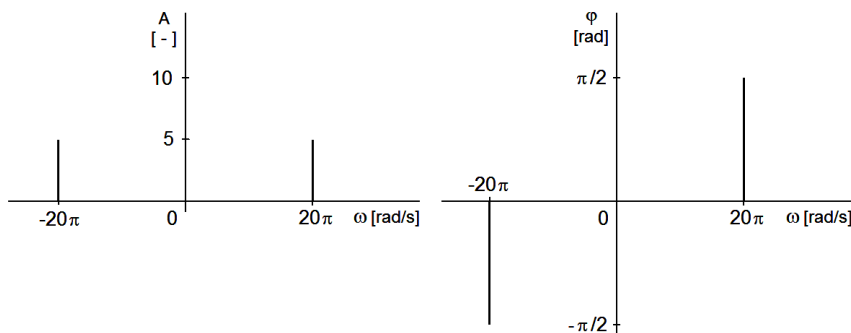
$$\dot{C}_0 = A \cdot \exp(j\varphi_0)/2 \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-0} = A \cdot \exp(-j\varphi_0)/2 \quad (2.12)$$

je

$$x(t) = \dot{C}_0 \cdot \exp(j\omega t) + \dot{C}_{-0} \cdot \exp[j(-\omega)t]. \quad (2.13)$$

To znamená, že harmonickou funkci lze vyjádřit součtem dvou komplexně sdružených výrazů, které jsou rovny okamžitým hodnotám komplexních exponenciálních funkcí vyjadřujících protiběžné otáčení vrcholů vektorů $\dot{C}_0 \cdot \exp(j\omega t)$ a $\dot{C}_{-0} \cdot \exp[j(-\omega)t]$ v komplexní rovině (obr.2.4). Harmonická funkce je tedy opět vyjádřena pomocí komplexních exponen-

²⁴ Tam, kde to bude nezbytné kvůli srozumitelnosti a odlišení od proměnných nabývajících reálných hodnot, budeme označovat komplexní proměnné tečkou nad symbolem proměnné.



Obr.2.5 Grafické vyjádření závislosti (a) amplitudy a (b) počáteční fáze na úhlové frekvenci harmonické funkce podle vztahu (2.6) vyjádřené podle vztahu (2.11)

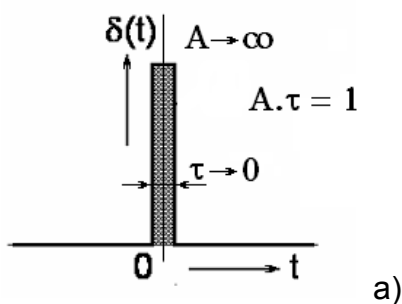
ciálních funkcí, tentokrát sice součtem komplexně sdružených hodnot, zato bez nutnosti mnohdy nešikovně hledat reálnou hodnotu funkce $\dot{C}_0 \cdot \exp(j\omega t)$.

Na základě výše uvedených úvah lze frekvenční závislost amplitudy a počáteční fáze harmonického signálu podle vztahu (2.3) vyjádřit graficky nejen formou podle obr.2.3, nýbrž i tak, jak je uvedeno na obr.2.5.

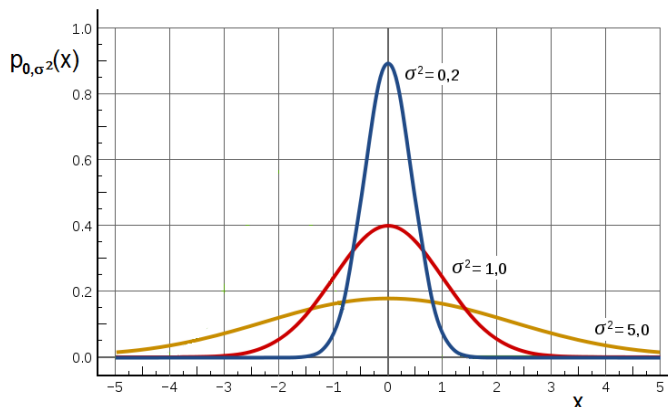
2.2.2 Neperiodické funkce

Signály, které nesplňují vztah (2.1), nazýváme **neperiodické**. Lze také říci a tohoto konstatování je možné v různých matematických úvahách s výhodou využívat, že neperiodické funkce jsou takové periodické funkce, jejichž základní perioda je nekonečná, tj. $x(t) = x(t + kT)$ pro $T \rightarrow \infty$. Neperiodické funkce s relativně krátkým časovým intervalem, ve kterém nastávají změny průběhu, označujeme jako **jednorázové**. Mezi nimi zaujímají nejdůležitější pozici dva deterministické signálové modely – **jednotkový (Diracův) impuls** a **jednotkový skok (Heavisidova funkce)**.

Jednotkový (Diracův²⁵) impuls, resp. **Diracova delta funkce** – neformálně je to taková funkce²⁶ $\delta(t)$, která je nulová pro všechny hodnoty reálné osy, kromě nuly, kde nabývá (nekonečné) hodnoty, tj.



Obr.2.6 Různé matematické popisy jednotkového impulsu



²⁵ **Paul Adrien Maurice Dirac** (*1902, Bristol, V.Británie, +1984 Tallahassee, Florida) britský teoretický fyzik, který se zabýval kvantovou teorií, obecnou teorií relativity a kosmologií. V roce 1933 dostal spolu s Erwinem Schrödingerem Nobelovu cenu za fyziku.

²⁶ Z čistě matematického hlediska není Diracův impuls funkcí, protože jakákoliv reálná integrovatelná funkce, která je rovna nule v celém rozsahu argumentu, vyjma jednoho bodu, má integrál roven nule. Matematicky přesnější definice říká, že Diracův impuls není funkce, ale zobecněná funkce nebo funkcional, zvaný distribuce.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } t = 0; \\ 0 & \text{pro } t \neq 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.15)$$

Zjednodušeně lze říci, že jednotkový impulz $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice vysoký (limitně s nekonečnou výškou) obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky, tzn. že mohutnost, definovaná plochou, kterou signál ohraničil spolu s časovou osou je jednotková (obr.2.6a).

Srozumitelnou představu o vlastnostech Diracova impulzu poskytuje i limita ze vztahu pro normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a rozptyl σ jdoucí k nule (viz obr.2.6b)

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}. \quad (2.16)$$

Vzhledem k platnosti vztahu (2.15) platí i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1, \quad (2.17)$$

kde argument delta funkce vyjadřuje posunutí impulzu o hodnotu t_0 v kladném směru osy t . Z tohoto vztahu pak můžeme dále odvodit

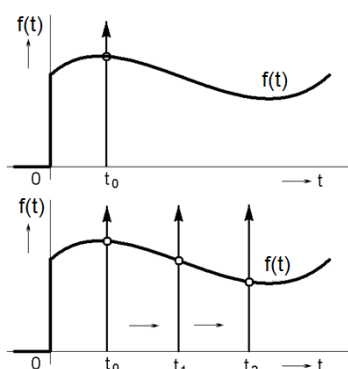
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = f(t_0). \quad (2.18)$$

Tento výsledek lze geometricky interpretovat tak, že plocha vymezená součinem spojitě funkce $f(t)$ a jednotkového impulzu $\delta(t - t_0)$ je rovna hodnotě funkce $f(t)$ v tom okamžiku, kde se vyskytuje jednotkový impulz. Tato vlastnost se nazývá **vzorkovací vlastností** jednotkového impulzu (obr.2.7).

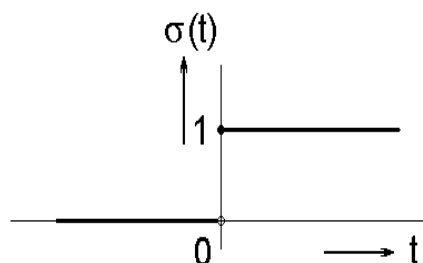
Jednotkový skok $\sigma(t)$ (Heavisidova²⁷ funkce) (obr.2.8) je definován vztahem např.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Navzdory skutečnosti, že obě funkce jsou v ideálním teoretickém tvaru fyzikálně nereali-



Obr.2.7 Vzorkovací vlastnost jednotkového impulzu



Obr.2.8 Jednotkový skok

²⁷ **Oliver Heaviside** (*1850, Londýn; +1925 Torquay, Devon, V.Británie) britský elektrický inženýr, matematik a fyzik, samouk. Významný především pro zavedení komplexní a vektorové analýzy elektrických obvodů, vytvořil nové metody řešení diferenciálních rovnic.

zovatelné (díky nekonečně rychlým změnám hodnoty), mají velký význam především v experimentální analýze. Představují modely dvou základních způsobů změny experimentálních podmínek. Diracův impulz představuje model krátkodobého stimulu (světlený záblesk při evokování reakce zrakového systému, vojenský povel, ...), jednotkový skok reprezentuje trvalou změnu experimentálních podmínek (změna stupně zátěže při zátěžovém vyšetřování kardiorepiračního systému, zavedení nového způsobu terapie, skončení kouření, apod).

Pro obě funkce formálně platí

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \sigma(t) \quad (2.20)$$

a stejně tak i naopak

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t). \quad (2.21)$$

Náhodné funkce jsou další důležitou formou neperiodických funkcí. Považujeme je za realizaci nějakého náhodného procesu. V teorii signálů je často označujeme pojmem šum, ve statistice se spíše setkáváme s poněkud obecnějším pojmem variabilita. Díky své náhodné podstatě nemohou být přesně charakterizovány svým průběhem, nýbrž pouze parametry definující vlastnosti šumu v časové, ale např. i ve frekvenční oblasti. Nejčastěji používanou abstrakcí je tzv. **bílý šum** s normálním rozložením funkčních hodnot, s nulovou střední hodnotou, definovaným rozptylem a s nezávislými sousedními hodnotami. Označení bílý vychází z ekvivalence s bílým světlem, které obsahuje rovnoměrně zastoupené složky všech vlnových délek, resp. frekvencí. Proto podobně i bílý šum zahrnuje rovnoměrně zastoupené složky o všech kmitočtech.

Při práci s náhodnými procesy a funkcemi jsou důležité dva pojmy - **stacionarita**²⁸ a **ergodicita**²⁹.

Stacionární náhodný proces je takový, jehož forma chování (jeho pravděpodobnostní struktura, daná např. rozdělením pravděpodobnosti) nezávisí na čase³⁰. Jinak formulováno, stacionární náhodný proces je takový, jehož libovolné pravděpodobnostní charakteristiky nezávisí na poloze počátku časové osy.

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

Ergodický náhodný proces je takový, jehož všechny realizace mají tutéž pravděpodobnostní strukturu, tytéž pravděpodobnostní charakteristiky. Pravděpodobnostní charakteristiky pak lze odhadovat z jediné, libovolné realizace náhodného procesu.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

²⁸ **stacionarita** (lat. *stationarius*, ze *statio* – stoj, postoj, místo pobytu, bydliště; původně ze slovesa *stare* – stát, pevně stát, stát v řadě, stát ve zbrani) – nepohyblivý, neměnný

²⁹ **ergodicita** (řeč. složenina slov *ἐργον* práce a *ὁδος* cesta). Slovo bylo zavedeno Boltzmannem při řešení statistických problémů mechaniky. Používal je pro označení dynamických systémů, které zhruba řečeno měly stejné chování v čase i prostoru.

³⁰ Přestože stacionaritu intuitivně vnímáme jako časovou vlastnost procesu, je třeba podotknout, že stacionaritu můžeme chápat jako vlastnost vůči jakékoliv nezávisle proměnné, při zpracování obrazové 2D informace jsou to prostorové souřadnice, atd.

2.3 Ještě dva důležité pojmy

Při zpracování signálů a časových řad mají značný význam i pojmy *energie*, příp. *výkon signálu*. Ty jsou odvozeny z primární představy signálů, reprezentovaných základními elektrickými veličinami – elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitý výkon $p(t)$ v čase t , vykonávaný na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t) \cdot i(t). \quad (2.22)$$

Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (2.23)$$

a po dosazení z (2.23) do (2.22) můžeme psát, že

$$p(t) = R \cdot i(t) \cdot i(t) = R \cdot i^2(t) = u(t) \cdot u(t) / R = u^2(t) / R. \quad (2.24)$$

Když je $R = 1 \Omega$, zjednoduší se vztah (2.24) na

$$p(t) = i^2(t) = u^2(t) \quad (2.25)$$

a celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je dána

$$A = \int_T p(t) dt = \int_T i^2(t) dt = \int_T u^2(t) dt. \quad (2.26)$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitě funkce (signálu) $x(t)$ vztahem

$$E_x = \int_T x^2(t) dt. \quad (2.27)$$

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

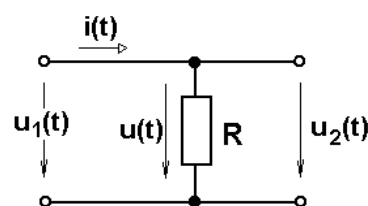
$$P = \frac{E}{T} \quad (2.28)$$

a z toho

$$P_s = \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt. \quad (2.29)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztah (2.29) modifikuje do limitního tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T x^2(t) dt. \quad (2.30)$$



Obr.2.9 Jednoduchý elektrický obvod s odporem

2.4 Základní operace s matematickými modely signálů spojitých v čase

2.4.1 Operace s jednou funkcí

Násobení konstantou Okamžitá hodnota funkce se zvětší (zmenší) A -krát po násobení funkce konstantou. Pro $A > 1$ hovoříme o zesílení, pro $A < 1$ o zeslabení, resp. útlumu (obr.2.10).

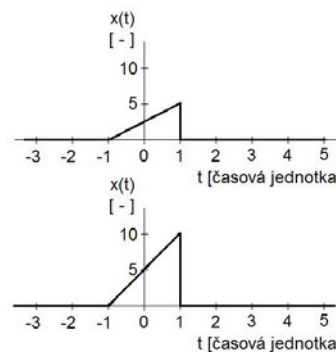
Změna časového měřítka

Po vynásobení hodnot nezávisle proměnné (času) konstantou k dochází k modifikaci časového měřítka – pro $k > 1$ hovoříme o časové kompresi, pro $k < 1$ o časové expanzi.

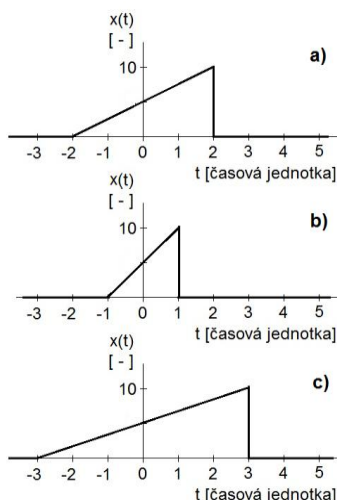
Je třeba si uvědomit, že po změně měřítka nabývá funkce v čase t týchž hodnot jako původní signál v čase $k \cdot t$, pro $k > 1$ tedy plyne čas rychleji, pro $k < 1$ plyne čas pomaleji (obr.2.11).

Posunutí v čase

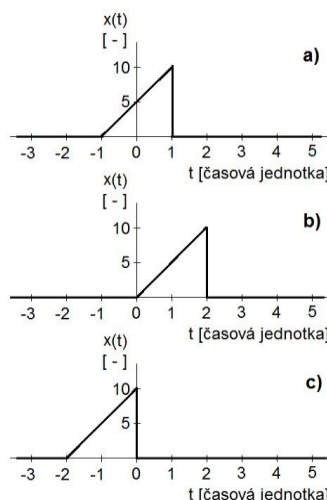
Po přičtení (odečtení) hodnoty t_0 od původního času t dochází k posunu časového průběhu funkce vlevo (vpra-



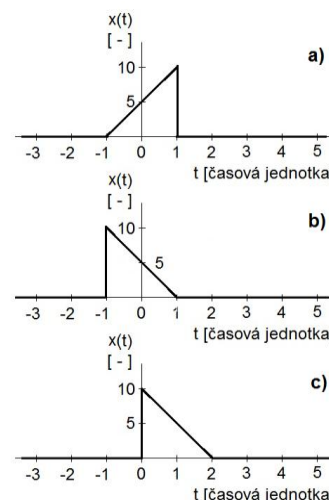
Obr.2.10 Násobení konstantou – $A=2$



Obr.2.11 Změna časového měřítka - a) originál; b) $k=2$; c) $k=2/3$



Obr.2.12 Posunutí v čase - a) originál $x(t)$; b) funkce $x(t-1)$; c) funkce $x(t+1)$;



Obr.2.13 Inverze časové osy - a) originál $x(t)$; b) funkce $x(-t)$; c) funkce $x(-(t-1))$

vo) na časové ose. Jinými slovy po přičtení hodnoty t_0 dochází ke zpoždění funkce, po odečtení se funkce předchází (obr.2.12).

V čase posunutá funkce nabývá v čase $t \pm t_0$ hodnot, kterých nabývá původní signál v čase t . Kterým směrem dochází k posunu si lze nejspíše uvědomit pro čas $t = 0$. Aby posunutý signál nabyl téže hodnoty jako původní signál v čase $t = 0$, pak musí být argument $t \pm t_0$ též roven nule. Tedy, přičítáme-li t_0 , je argument nulový pro $t = -t_0$, odečítáme-li t_0 , je argument nulový pro $t = t_0$.

Inverze časové osy

Inverzi časové osy provedeme změnou znaménka časového argumentu. Má-li současně dojít k časovému posunu, je třeba změnit znaménko u všech členů argumentu (obr.2.13).

2.4.2 Konvoluce³¹

Pokud pomineme takové legrační operace, jako jsou součet a součin, či jiné elementární binární, např. logické operace s binárními funkcemi, je základní operací, pracující se dvěma funkcemi, používanou v teorii signálů a soustav **konvoluce**. V této kapitole se seznámíme s její definicí a některými jejími vlastnostmi, její praktický význam vyplyne až z kapitol zabývajících se popisem lineárních systémů.

³¹ **Konvoluce** (lat. convolutus; com – s-, volvere – valit, válet, otáčet) – stočený, sbalený, ovinutý.

Definice

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi $x_1(t)$ a $x_2(t)$ téhož argumentu definovaný v případě spojitých funkcí integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau, \quad (2.31)$$

kde funkce $x_2(t)$ se často nazývá **konvoluční jádro**.

Funkci $x(t)$, jež je výsledkem konvoluce, lze považovat za jednu z obou funkcí (zpravidla $x_1(t)$) modifikovanou vlastnostmi konvolučního jádra ($x_2(t)$). Jak vyplývá hned z dále uvedeného komutativního zákona, význam obou vstupních funkcí lze zaměnit. Význam konvoluce lze vnímat ještě i jinak – jako váhovaný průměr funkce $x_1(\tau)$ v čase t , přičemž váhování je dáno funkcí $x_2(-\tau)$ posunutou o čas t . Přestože v kontextu těchto učebních textů vnímáme proměnou t jako čas, může opět obecně být jakéhokoliv charakteru.

Konvolučního vztahu se používá nejen v oblasti zpracování signálů, či jak posléze nahlédneme časových řad, nýbrž i v teorii pravděpodobnosti, statistice, počítačovém vidění a jiných technických oborech.

Pro konvoluci platí následující zákonitosti:

- komutativní zákon

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t). \quad (2.32)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} x_1(t) * x_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau = \left. \begin{array}{l} u = t - \tau \\ \tau = t - u \\ d\tau = -du \end{array} \right| = \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} x_2(u) \cdot x_1(t - u) \cdot du = x_2(t) * x_1(t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

□□□

- distributivní zákon

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t); \quad (2.34)$$

- asociativní zákon

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t); \quad (2.35)$$

- zákon o posunu v čase

Je-li $x_1(t) * x_2(t) = c(t)$, pak

$$x_1(t) * x_2(t - T) = c(t - T), \quad x_1(t - T) * x_2(t) = c(t - T)$$

a

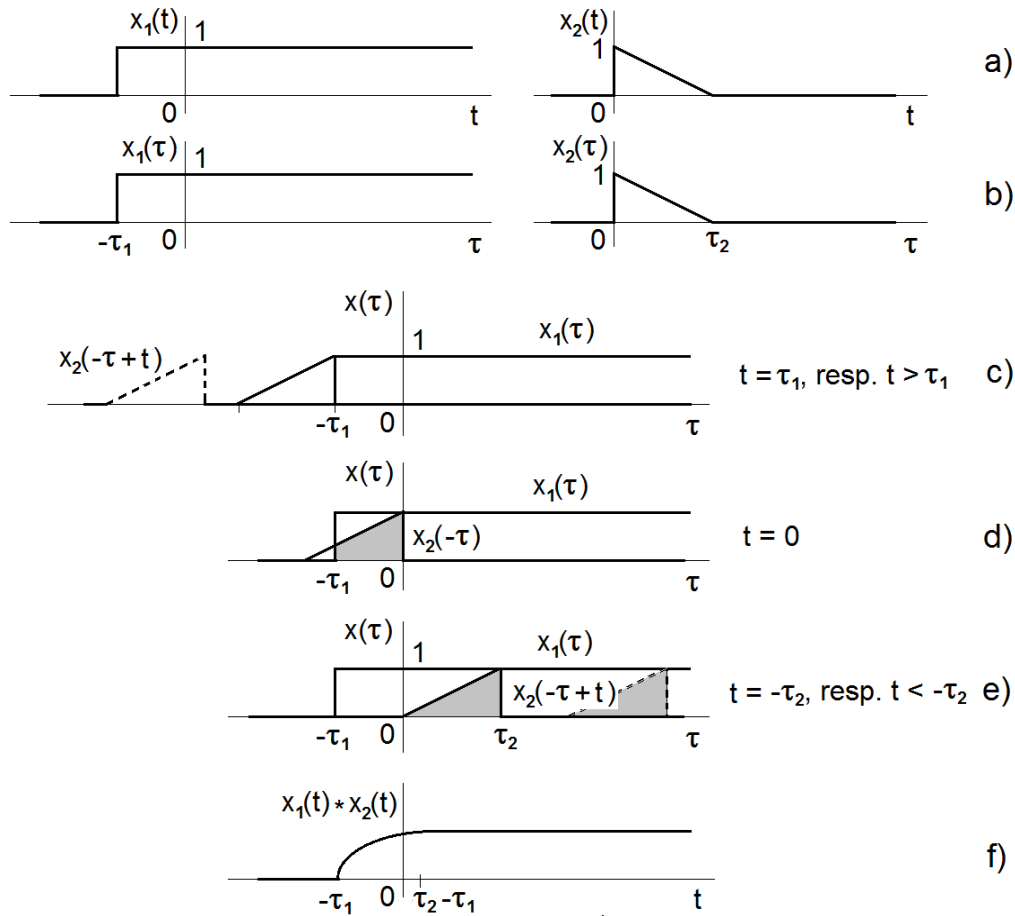
$$x_1(t - T_1) * x_2(t - T_2) = c(t - T_1 - T_2). \quad (2.36)$$

Geometrický význam konvoluce

Jak vyplývá z definičního vztahu, je konvoluce rovna hodnotě určitého integrálu ze součinu dvou funkcí, z nichž jedna setrvává ve své pozici a druhá (zpravidla konvoluční jádro) je invertována vzhledem ke svému argumentu (času) a posunuta o hodnotu, která odpovídá argumentu funkcí, pro který je výpočet prováděn (obr.2.14).

Při výpočtu je potřeba si uvědomit, že integrační proměnná v definičním konvolučním vztahu je τ , proměnná t je pouze parametrem. V příkladu na obr.2.14 jsou tři úseky, kdy je součin signálu $x_1(\tau)$ a posunutého $x_2(t - \tau)$ nulový ($t \geq \tau_1$), konstantní ($t \leq \tau_1 - \tau_2$) a proměnný

($t \in (\tau_1 - \tau_2, \tau_1)$). Proměnná část se v tomto případě řídí kvadratickou závislostí, jak si čtenář jistě snadno vypočítá.



Obr.2.14 Geometrický význam konvoluce

Příklad

Určete konvoluci $c(t)$ funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ podle obr.2.15.

Řešení:

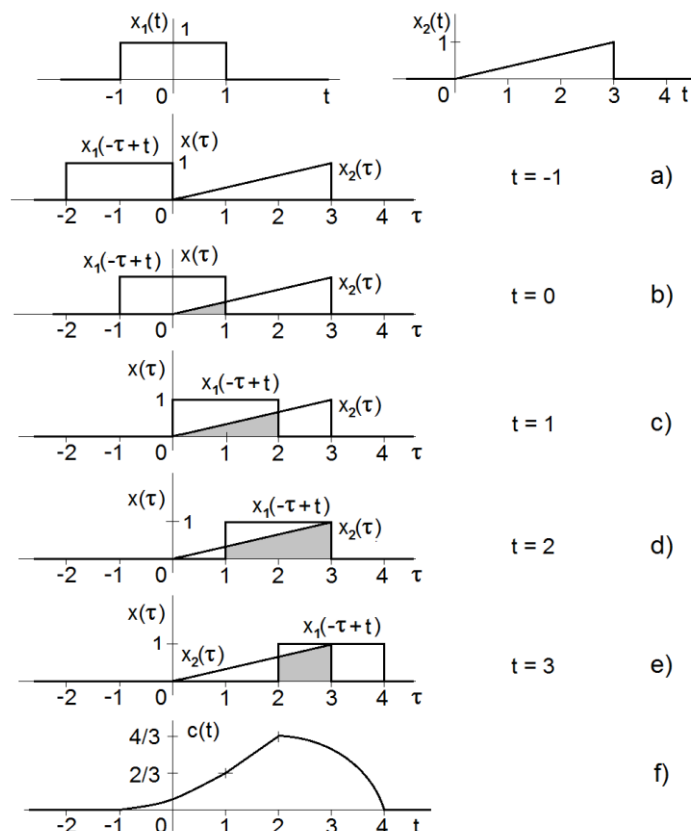
Pro řešení tohoto zadání použijme druhé varianty definičního konvolučního vztahu, tj.

výrazu $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau$. V tom případě se výpočet konvoluce rozdělí podle vzájemné polohy obou funkcí na následujících pět případů podle hodnot parametru t :

- $t < -1$ – součin obou funkcí je v tomto případě nulový, tedy i plocha vymezená tímto součinem a konvoluce je rovna nule (obr.2.15a);
- $t \in \langle -1, 1 \rangle$ – plocha součinu je vymezena průběhem funkce $x_2(\tau)$ v intervalu od $\tau = 0$ a polohou horní, tj. sestupné hrany funkce $x_1(-\tau + t)$, určené hodnotou $t + 1$ (obr.2.15b,c); hodnota konvolučního integrálu je

$$c(t)_{-1,1} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau = \int_0^{t+1} \frac{1}{3} \cdot \tau \cdot d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^{t+1} = \frac{(t+1)^2}{6}; \quad (2.37)$$

- $t \in \langle 1, 2 \rangle$ – v tomto intervalu je plocha součinu ohraničená opět funkcí $x_2(\tau)$, tentokrát a v daném konkrétním případě v intervalu od $t - 1$ do $t + 1$ (obr.2.15c,d)



Obr.2.15 Konvoluce zadaných signálů

$$c(t)_{1,2} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^{t+1} \frac{1}{3} \tau d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^{t+1} = \frac{(t+1)^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{2t}{3}; \quad (2.38)$$

- $t \in \langle 2, 4 \rangle$ – plocha součinu je nenulová v intervalu od vzestupné hrany funkce $x_1(-\tau+t)$, která je na pozici $t-1$, do sestupné hrany funkce $x_2(\tau)$, tj. $\tau = 3$ (obr.2.15e), tedy platí

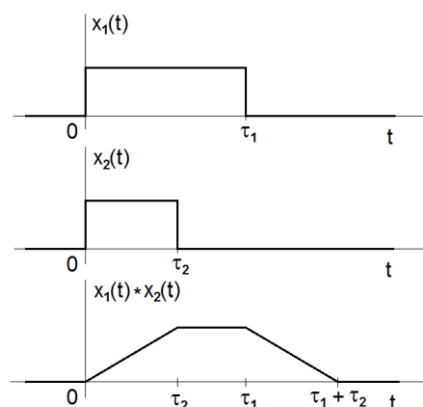
$$c(t)_{2,4} = x_1(t) * x_2(t) = \int_{t-1}^3 \frac{1}{3} \tau d\tau = \frac{1}{3} \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-1}^3 = \frac{3^2 - (t-1)^2}{6} = \frac{-(t^2 - 2t - 8)}{6}; \quad (2.39)$$

- $t > 4$ – součin obou funkcí je opět nulový, proto i konvoluční integrál.

Výsledný průběh konvoluce obou signálů daný výše vypočítanými dílčími průběhy je uveden na obr.2.15f. □□□

Šířková vlastnost konvoluce

Pokud jsou doby trvání (šířky, tj. doby, kdy jsou hodnoty funkcí různé od nuly) funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ konečné, např. τ_1 v případě funkce $x_1(t)$ a τ_2 pro $x_2(t)$ je doba trvání konvoluce obou funkcí rovna $\tau_1 + \tau_2$ (obr.2.16).



Obr.2.16 Konvoluce dvou obdélníkových impulzů délek τ_1 a τ_2

Konvoluce funkce s jednotkovým impulzem

Výsledkem konvoluce funkce $x(t)$ s jednotkovým impulzem je funkce $x(t)$.

Důkaz:

Z definice konvoluce vyplývá, že

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Protože $\delta(t - \tau)$ reprezentuje jednotkový impulz pro $\tau = t$, podle vzorkovací vlastnosti jednotkového impulzu je integrál ve vztahu (2.40) roven hodnotě $x(\tau)$ v $\tau = t$, tj. $x(t)$. Proto

$$x(t) * \delta(t) = x(t). \quad (2.41)$$

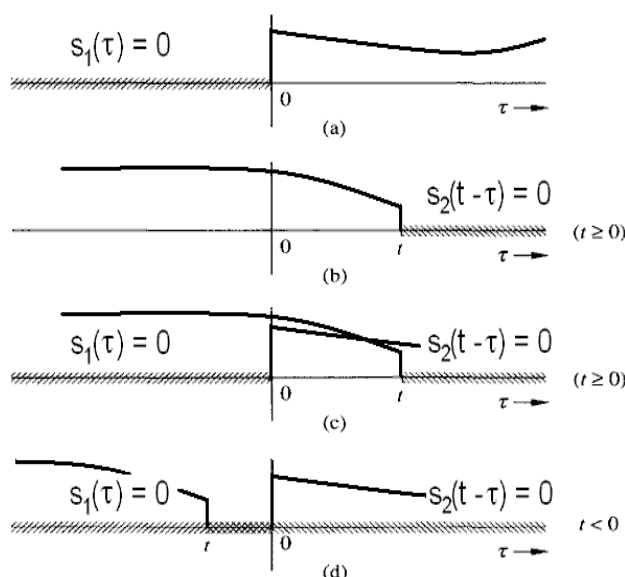
□□□

Kauzalita³²

Kauzalita je vlastnost spíše systémů, v případě funkcí vyplývá až z podstaty kauzálních systémů. **Kauzální** je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku t_0 závisí pouze na průběhu vstupního signálu $x(t)$ pro $t \leq t_0$. Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupního signálu. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme **nekauzální**, příp. **anticipativní**. Nebo ještě jinak, systém je kauzální, pokud se výstup systému neobjeví dříve, než je na vstup přiveden vstupní signál. Všechny rozumné reálné systémy jsou systémy kauzální. Signály zpravidla začínají v určitém referenčním okamžiku, který nazýváme počátkem časové osy. Jako kauzální signály zprostředkovaně označujeme takové signály, pro které platí $x(t) = 0$ pro $t < 0$ (obr.2.14). Z toho plyne, že je možné změnit integrační meze v definičním vztahu pro konvoluci na



Obr.2.17 Kauzální signál



Obr.2.18 Vzájemné pozice dvou kauzálních funkcí při výpočtu konvoluce

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) d\tau. \quad (2.42)$$

Důvody snad názorně plynou z obr.2.18.

³² **kauzální** (lat. *causalis*) – příčinný, vázaný na příčinu; kauzalita znamená vztah mezi příčinou a jejím následkem, vyjadřuje situaci, kdy jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují;

2.4.3 Korelace³³

Slovo korelace obecně znamená vzájemný vztah, souvztažnost mezi dvěma znaky, veličinami, objekty, ději. Jsou-li dvě veličiny korelovány, pak pokud se jedna veličina mění, přiměřeně se mění, dle míry souvztažnosti, i veličina druhá. Obecný pojem ale nevyjadřuje ani kvalitu vztahu (např. zda je lineární, nebo nelineární, zda je přímo či nepřímo úměrný, apod.), ani kvantitu – míru vzájemného vztahu. Nelze ani posoudit orientaci této vzájemnosti, tj. která veličina závisí na druhé, kde je příčina a kde důsledek případných změn – to řeší kauzalita.

Matematika, resp. statistika vnímá korelaci zpravidla jako lineární vztah mezi dvěma veličinami, či procesy a za tohoto předpokladu umí stanovit i míru tohoto vzájemného vztahu.

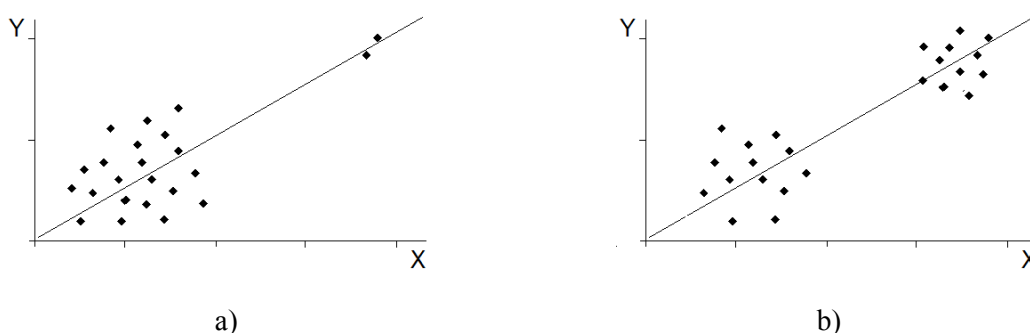
Korelační koeficienty

Míru korelace mezi hodnotami dvou statických³⁴ veličin (vektorů) určujeme pomocí korelačních koeficientů. Způsob jejich výpočtu závisí na charakteru veličin, jejichž vztah zkoumáme.

V případě, že veličiny X_1 a X_2 jsou náhodné kvantitativní veličiny, pak pro dvojice realizací (x_{11}, x_{21}) , (x_{12}, x_{22}) , ..., (x_{1n}, x_{2n}) je hodnota tzv. **Pearsonova korelačního koeficientu** dána vztahem

$$\rho_{x_1, x_2}^P = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} = \frac{E((X_1 - \mu_{x_1})(X_2 - \mu_{x_2}))}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \mu_{x_1})(x_{2i} - \mu_{x_2})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \mu_{x_1})^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \mu_{x_2})^2}}. \quad (2.43)$$

Hodnoty Pearsonova korelačního koeficientu se pohybují v intervalu $\langle -1; 1 \rangle$. Obě mezní hodnoty znamenají přesný lineární vztah. V případě -1 se jedná o nepřímou závislost, tj. s růstem hodnot jedné z proměnných hodnoty druhé proměnné klesají (funkční vztah má zápornou směrnici), pro $+1$ je úměra přímá – s růstem hodnot jedné proměnné rostou hodnoty i druhé proměnné (funkční vztah má kladnou směrnici). V případě, že veličiny mají vzájemné dvourozměrné normální rozložení, pak nulová hodnota korelačního koeficientu znamená i nezávislost obou veličin. Pokud ale tento předpoklad není splněn (a nutno říci, že v praxi se tento předpoklad ne vždy ověřuje), pak o obou veličinách nemůžeme říci více, než jen, že jsou nekorelované.



Obr.2.19 Příčiny možného nadhodnocení Pearsonova korelačního koeficientu – a) vlivem odlehlých hodnot; b) vlivem shluků (upraveno podle [21])

³³ **korelace** (lat. *correlatio*; *latio* – nesení, poskytování; *relatio* – nesení zpět, odnášení, opakování, zpráva, vztah, poměr) – vzájemný vztah, souvislost

³⁴ Statická data nezávisí na čase, ani na žádné další veličině – pořadí, v jakém jsou seřazena, není v jádru důležité; data nejsou tzv. uspořádaná. Popisují určitý objekt, jehož stav se nemění, nebo jehož změny nejsou z hlediska analýzy podstatné. Typickým příkladem jsou např. patientské registry, nebo soubory popisných dat, které slouží ke klasifikaci rostlin nebo živočichů, příp. patientské záznamy, na základě kterých se stanoví diagnóza.

Hodnoty Pearsonova korelačního koeficientu mohou být nesplněním předpokladu o vzájemné dvourozměrné normalitě veličin X_1 a X_2 nepříznivě ovlivněny (nadhodnoceny), např. při přítomnosti odlehlých hodnot, pokud jsou data rozdělena do shluků, nebo i vlivem další skryté veličiny (obr.2.19).

V případě, že předpoklad o rozdělení náhodných proměnných X_1 a X_2 není splněn, resp. v případě ordinálních dat, je lépe použít např. neparametrického **Spearmanova korelačního koeficientu** definovaného vztahem

$$\rho_{X_1, X_2}^s = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (R_{X_1, i} - R_{X_2, i})^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (2.44)$$

kde $R_{X_1, i}$ a $R_{X_2, i}$ jsou pořadí hodnot náhodných veličin X_1 a X_2 .

Korelační funkce

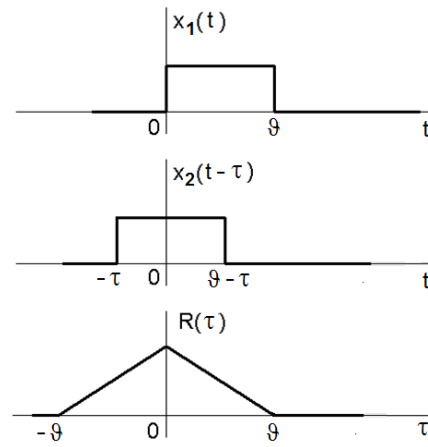
Výsledek výpočtu korelačního koeficientu je skalár a je proto vhodný pro posouzení korelace dvou statických veličin. Pokud chceme zkoumat, jak se velikost korelace mění v čase u dynamických dat, je potřeba použít jinou, funkční formu popisu korelace. Takovou možnost poskytuje tzv. **korelační funkce** $R_{x_1 x_2}(t_1, t_2)$, která je mírou souvztažnosti mezi hodnotami realizace x_1 náhodného procesu ξ_1 v okamžiku t_1 a hodnotami realizace x_2 náhodného procesu ξ_2 v okamžiku t_2 . V souladu s definicí Pearsonova korelačního koeficientu je korelační funkce definována vztahem

$$R_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = \frac{E[(x_1(t_1) - \mu_{t_1})(x_2(t_2) - \mu_{t_2})]}{\sigma_{t_1} \sigma_{t_2}}. \quad (2.45)$$

V oblasti zpracování signálů, resp. časových řad se data častěji používají bez standardizace, tj. bez odečítání střední hodnoty a dělení směrodatnou odchylkou. V tom případě a dále za předpokladu stacionarity a ergodicity obou náhodných procesů $\xi_1(t)$ a $\xi_2(t)$ a jim odpovídajícím reálným realizacím $x_1(t)$ a $x_2(t)$, je odhad **vzájemné (křížové) korelační funkce** (cross-correlation function) určený z nekonečného časového intervalu závislý pouze na rozdílu obou časových okamžiků $\tau = t_1 - t_2$ a je definován vztahem

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt, \quad (2.46)$$

kde T je doba pozorovaného časového intervalu.



Obr.2.20 Příklad průběhu korelační funkce pro dvě stejně široké obdélníkové funkce

³⁵ V odborné literatuře se často liší definice korelační funkce ve znaménku před argumentem τ ve funkci x_2 v integrálu na pravé straně výrazu. Tato difference znamená, že se definice liší ve vnímání posunu druhé funkce v čase. Je-li $\tau > 0$, pak výraz $x_2(t + \tau)$ reprezentuje posun funkce x_2 směrem k záporným hodnotám času (viz kap.2.4.1) a výraz $x_2(t - \tau)$ posun funkce x_2 směrem ke kladným hodnotám času. Jak posléze uvidíme, z hlediska autokorelační či autokovarianční funkce, které jsou sudé, nemá volba znaménka na výsledný průběh žádný vliv, z hlediska vzájemné korelační, resp. kovarianční funkce reprezentuje volba znaménka inverzi časové osy výsledné funkce. To samozřejmě může způsobovat nedorozumění v interpretaci výsledků, proto je třeba být si vědom této skutečnosti a volby. Protože se varianta s kladným znaménkem vyskytuje častěji, dáváme v tomto textu přednost této variantě.

Podobné vlastnosti má tzv. **kovarianční funkce**, která se od korelační liší pouze tím, že hodnoty obou procesů jsou centrovány pomocí středních hodnot μ_1 a μ_2 daných realizací $x_1(t)$ a $x_2(t)$. Je definována vztahem

$$\begin{aligned} C_{x_1, x_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (x_1(t) - \mu_1)(x_2(t + \tau) - \mu_2) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x_1(t) - \mu_1)(x_2(t + \tau) - \mu_2) dt. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pokud se zajímáme o dynamiku vztahu mezi úseky jedné realizace náhodného procesu, tu lze posoudit na základě znalosti tzv. **autokorelační funkce**, jejíž odhad pro ergodický proces $\xi(t)$ s realizací $x(t)$ lze pro případ se spojitým časem určit podle vztahu

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt, \quad (2.48)$$

resp. **autokovarianční funkce** definované jako

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (x(t) - \mu)(x(t + \tau) - \mu) dt. \quad (2.49)$$

Je zřejmé, že hodnoty korelační, resp. kovarianční funkce počítané pomocí uvedených limitních výrazů jsou za předpokladu, že je hodnota integrálu v obou definičních vztazích konečná, nulové. Proto se v tom případě používají pro určení obou funkcí pouze výrazy

$$R'_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t + \tau) dt, \quad (2.50)$$

resp.

$$C'_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(t) - \mu_1)(x_2(t + \tau) - \mu_2) dt, \quad (2.51)$$

které ale vyjadřují pouze relativní míru vzájemnosti obou funkcí v závislosti na jejich vzájemném posunu. Totéž samozřejmě platí i pro autokorelační a autokovarianční funkci.

Nekonečné integrační meze jsou určitě teoretickou záležitostí, při zpracování reálných dat jsou k dispozici vždy jen konečné úseky signálů. Pak nezbyvá než průběh korelační či kovarianční funkce odhadnout z toho co je k dispozici. Tedy pro odhad vzájemné korelační funkce dvou proměnných je

$$\hat{R}_{x_1, x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t)x_2(t + \tau) dt, \quad (2.52)$$

kde T je konečná doba trvání známého úseku dat.

Principu korelační funkce lze použít i pro deterministické, zejména periodické funkce. I v tom případě hodnota korelační funkce definuje míru podobnosti obou funkcí v závislosti na jejich vzájemném posunutí. Pokud uvažujeme dva periodické průběhy s toutéž periodou T , je korelační funkce periodická s toutéž periodou. Vzájemná či křížová korelační funkce dvou periodických funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ o téže periodě T je definována vztahem

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t + \tau) dt \quad (2.53)$$

a ekvivalentně autokorelační funkce periodické funkce $x(t)$ je

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x(t)x(t+\tau)dt. \quad (2.54)$$

Navzdory skutečnosti, že jsou pravé strany ve výrazech (2.52) a (2.53) stejné, díky periodičnosti funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ ve vztahu (2.53) představuje tento vztah výpočet skutečného průběhu korelační funkce, zatímco vztah (2.52) pouze odhad.

Autokorelační i autokovarianční funkce jsou sudé, pro všechny reálné hodnoty posunu τ je $R(0) \geq R(\tau)$, stejně tak jako $C(0) \geq C(\tau)$ a $R(0)$ je rovna výkonu funkce, resp. $C(0)$ výkonu variability dané funkce. V případě, že je zkoumaná funkce periodická, je její autokorelační (autokovarianční) funkce rovněž periodická s toutéž periodou.

Příklad

Určete průběh autokorelační funkce pro $x(t) = \exp(-at) \cdot \sigma(t)$, kde $\sigma(t)$ je jednotkový skok. Předpokládejme, že $\tau > 0$. Ověřte, jaký vliv na průběh výsledné autokorelační funkce má alternance znaménka v druhém členu definičního vztahu pro výpočet autokorelace.

Řešení:

Integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\exp(-at) \cdot \sigma(t)|^2 dt \quad (2.55)$$

je konečný, proto budeme autokorelační funkci počítat podle vztahu

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-at) \cdot \sigma(t))(\exp(-a(t+\tau)) \cdot \sigma(t+\tau))dt \quad (2.56)$$

Abychom si výpočet trochu usnadnili, připomeňme si, že jednotkový skok je definován vztahem (2.19), tj.

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$

Protože $\tau > 0$, platí pro posunutý jednotkový skok

$$\sigma(t+\tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < -\tau; \\ 1, & \text{pro } t \geq -\tau. \end{cases} \quad (2.57)$$

Z těchto dvou definic plyne, že pro součin obou jednotkových skoků (posunutého i neposunutého) je

$$\sigma(t)\sigma(t+\tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

To konečně znamená, že výpočet integrálu ve vztahu (2.56) může být formulován

$$\begin{aligned} \hat{R}'_{xx}(\tau) &= \int_0^{\infty} \exp(-at) \exp(-a(t+\tau))dt = \int_0^{\infty} \exp(-at) \cdot \exp(-a\tau) \cdot \exp(-at)dt = \\ &= \exp(-a\tau) \int_0^{\infty} \exp(-2at)dt = -\frac{\exp(-a\tau)}{2a} [\exp(-2at)]_0^{\infty} = \frac{-\exp(-a\tau)}{2a} (0-1) = \frac{\exp(-a\tau)}{2a} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Uvažme teď alternativu výpočtu autokorelační funkce podle vztahu

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt \quad (2.60)$$

To znamená, že je

$$\hat{R}'_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\exp(-at).\sigma(t))(\exp(-a(t-\tau)).\sigma(t-\tau))dt \quad (2.61)$$

V tom případě pro součin obou jednotkových skokových funkcí (posunuté i neposunuté) je

$$\sigma(t)\sigma(t-\tau) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < \tau; \\ 1, & \text{pro } t \geq \tau \end{cases} \quad (2.62)$$

a výpočet integrálu z (2.61) je

$$\begin{aligned} \hat{R}'_{xx}(\tau) &= \int_{\tau}^{\infty} \exp(-at) \exp(-a(t-\tau))dt = \int_{\tau}^{\infty} \exp(-at) \cdot \exp(-at) \cdot \exp(a\tau)dt = \\ &= \exp(a\tau) \int_{\tau}^{\infty} \exp(-2at) \cdot dt = -\frac{\exp(a\tau)}{2a} [\exp(-2at)]_{\tau}^{\infty} = \\ &= -\frac{\exp(a\tau)}{2a} (0 - \exp(-2a\tau)) = \frac{\exp(-a\tau)}{2a}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Oba výsledky nám na konkrétním příkladu demonstrovaly konstatování o sudosti autokorelační funkce, protože oba získané výsledky jsou stejné bez ohledu na volbu znaménka v definičním vztahu pro výpočet korelace. $\square\square\square$

Příklad

Vypočtete průběh vzájemné korelační funkce funkcí $x_1(t) = \cos(\pi t)$ a $x_2(t) = 4\sin(\pi t)$. Ověřte, jaký vliv na průběh výsledné korelační funkce má alternace znaménka v druhém členu definičního vztahu.

Řešení:

Protože argumenty obou harmonických funkcí jsou $\pi t = \omega t = 2\pi f t = 2\pi t/T = 2\pi t/2$, mají obě harmonické funkce tutéž periodu $T = 2$ [časové jednotky]. Tedy

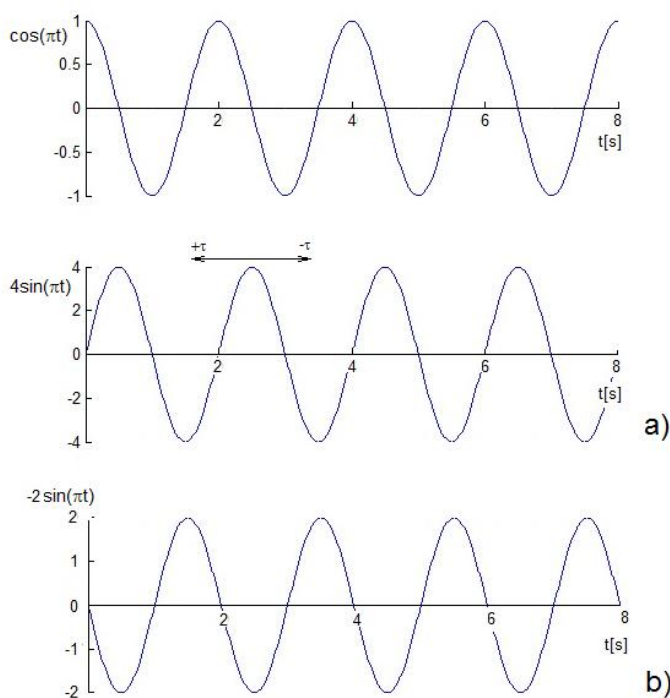
$$\begin{aligned} R_{x_1x_2}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t+\tau)dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(\pi t) \cdot 4\sin(\pi(t+\tau))dt = \\ &= 2 \int_0^2 \cos(\pi t) \cdot \sin(\pi(t+\tau))dt = \frac{2}{2} \int_0^2 [\sin(\pi\tau) + \sin(2\pi t + \pi\tau)]dt = \\ &= \int_0^2 \sin(\pi\tau)dt + \int_0^2 \sin(2\pi t + \pi\tau)dt = \sin(\pi\tau)[t]_0^2 + 0 = 2\sin(\pi\tau). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pokud by byla korelační funkce definována pomocí vztahu

$$R_{x_1x_2}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t-\tau)dt,$$

pak je

$$\begin{aligned}
R_{x_1 x_2}^-(\tau) &= \frac{1}{T} \int_T x_1(t) x_2(t - \tau) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 \cos(\pi t) \cdot 4 \sin(\pi(t - \tau)) dt = \\
&= 2 \int_0^2 \cos(\pi t) \cdot \sin(\pi(t - \tau)) dt = \frac{2}{2} \int_0^2 [\sin(-\pi\tau) + \sin(2\pi t - \pi\tau)] dt = \\
&= -\int_0^2 \sin(\pi\tau) dt + \int_0^2 \sin(2\pi t - \pi\tau) dt = -\sin(\pi\tau) [t]_0^2 + 0 = -2 \sin(\pi\tau).
\end{aligned} \tag{2.65}$$



Obr.2.21 a) Harmonické funkce dle zadání příkladu,
b) výsledná korelační funkce

Tentokrát se oba výsledky liší ve znaménku a pro oba případy je hodnota korelační funkce pro $\tau = 0$ rovna nule. V podstatě se pro daný konkrétní případ vypočtená vzájemná korelační funkce jeví jako lichá (pozor - nelze zobecnit). Pokusme se pomocí obr.2.21 tento rozdíl alespoň zhruba interpretovat.

Při výpočtu korelační funkce pomocí vztahu s $+\tau$ dochází při $\tau > 0$ k posunu funkce \sin směrem k menším hodnotám na časové ose (vlevo). To znamená, že podobnost obou křivek posunem z výchozího postavení nejdříve roste. Protože funkce $\sin(\pi\tau)$ s nárůstem hodnoty τ také nejdříve roste, odpovídá to očekávanému nárůstu hodnoty korelace.

Při výpočtu korelační funkce pomocí vztahu s $-\tau$ dochází při $\tau > 0$ k posunu funkce \sin směrem k větším hodnotám na časové ose (vpravo). To znamená, že podobnost obou křivek posunem z výchozího postavení nejdříve klesá. Protože funkce $\sin(\pi\tau)$ s nárůstem hodnoty τ od nuly nejdříve roste, odpovídá to očekávanému poklesu hodnoty korelace vyjádřené funkcí $-2\sin(\pi\tau)$. □□

Příklad

Určete hodnotu autokorelační funkce pro $x(t) = \cos(\omega t)$ a korelační funkce pro $x_1(t) = \cos(\omega t)$ a $x_2(t) = \cos(k\omega t)$, kde k je celé číslo, pro $\tau = 0$.

Řešení:

Funkce $\cos(\omega t)$ je periodická, autokorelační funkci proto budeme počítat podle vztahu (2.54). Je tedy

$$\begin{aligned}
R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\omega t + \tau) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(\tau) dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos(2\omega t + \tau) dt = \\
&= \frac{\cos(\tau)}{2T} [T - 0] + 0 = \frac{\cos(\tau)}{2}
\end{aligned}$$

a pro $\tau = 0$ bude $R_{xx}(0) = 0,5$.

Pro žádanou korelační funkci bude

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(k\omega t + \tau) dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \cos[(k-1)\omega t - \tau] dt + \frac{1}{2T} \int_0^T \cos[(k+1)\omega t + \tau] dt.$$

Protože oba získané výrazy integrujeme přes periodu funkce $\cos(\omega t)$, kde $\omega = 2\pi/T$ a frekvence druhé funkce je dána celočíselným násobkem frekvence první funkce, jsou oba dílčí integrály rovny nule, tedy je i $R_{xx}(0) = 0$.

Pokusíme-li se zobecnit tyto výsledky, pak můžeme konstatovat, že hodnota korelační funkce periodické funkce s jádrovou harmonickou funkcí se stejnou periodou pro $\tau = 0$ nabývá nějaké, obecně nenulové hodnoty (její velikost zatím nerozebíráme). Pokud budeme počítat hodnotu korelace mezi periodickou funkcí a jádrovou harmonickou funkcí, jejíž frekvence je rovna celočíselnému násobku frekvence dané periodické funkce, pak korelační funkce a tím i její hodnota pro $\tau = 0$ je nulová. $\square\square\square$

2.5 Rozklad spojitých periodických funkcí na dílčí harmonické složky

Zpracovávané reálné signály a je popisující matematické funkce zpravidla nemají jednoduchý průběh a proto se snažíme vyjádřit je nějakým jednodušším způsobem, např. rozkladem na součet nějakých jednoduchých funkcí. Takovým postupem je třeba Taylorův, resp. Maclaurinův rozklad funkce v okolí bodu na polynomiální složky.

Rozklad periodické spojitě funkce pomocí Fourierovy³⁶ řady na součet harmonických funkcí může být považován za alternativní způsob, samozřejmě za jiných okolností a jiných podmínek. Harmonické funkce jsou v tomto případě použity díky jejich přirozené příjemné fyzikální nebo geometrické interpretaci, i když, jak se posléze ukazuje, výpočetní pracnost spojená s výpočtem jejich hodnot přináší nemalé trampoty. Proto nástup výpočetní techniky do vědeckých výpočtů způsobil i využití v analýze funkcí i jiných bázevých funkcí, např. binárních.

Každou periodickou funkci $x(t+kT) = x(t)$, která vyhovuje Dirichletovým podmínkám³⁷, můžeme rozložit ve Fourierovu (trigonometrickou) řadu, kterou v originálním tvaru, předpokládajícím rozklad na harmonické kosinové a sinové složky bez členu vyjadřujícího počáteční fázi v argumentu, píšeme

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (2.66)$$

kde $\Omega = 2\pi/T$ je úhlový kmitočet základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$ a a_n a b_n jsou Fourierovy koeficienty dané vztahy

³⁶ **Jean Baptiste Joseph Fourier** (*1768, Auxerre, Francie, +1830, Paříž,) byl francouzský matematik a fyzik, zkoumání problémů šíření tepla v pevných látkách ho přivedlo až k teorii rozkladu funkcí do trigonometrické řady (1807). Byl velkým příznivcem Napoleona Bonaparte, se všemi osobními důsledky, které mu to v té době přinášelo. Rovněž objevitel skleníkového efektu (1824).

³⁷ **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (*1805, Düren, Německo, +1859, Göttingen), německý matematik, který se zabýval především teorií čísel a teorií Fourierovy řady, případně dalšími oblastmi matematické analýzy, matematické statistiky i geometrie. Byl jedním z prvních matematiků, kteří se pokusili o formální definici funkce.

Dirichletovy podmínky pro rozklad periodické funkce $x(t)$ do Fourierovy řady jsou:

1) $x(t)$ je absolutně integrovatelná nad každou periodou; 2) $x(t)$ má nad každou periodou pouze konečný počet maxim a minim; 3) $x(t)$ má nad každou periodou konečný počet nespojitostí.

Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné. Lze konstatovat, že všechny rozumné, tj. fyzikálně realizovatelné funkce Dirichletovy podmínky splňují.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \cos n\Omega t \cdot dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \sin n\Omega t \cdot dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (2.67)$$

případně s využitím úplného definičního tvaru kosinové funkce ve tvaru tzv. harmonické Fourierovy řady

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos(n\Omega t + \varphi_n)), \quad (2.68)$$

kde

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad (2.69)$$

a pro $n > 1$

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad (2.70)$$

$$\varphi_n = \begin{cases} -\arctg \frac{b_n}{a_n}, & \text{pro } a_n \geq 0; \\ -\arctg \frac{b_n}{a_n} + \pi, & \text{pro } a_n < 0 \end{cases} \quad (2.71)$$

a výraz $C_n \cdot \cos(n\Omega t + \varphi_n)$ nazýváme n -tou harmonickou složkou signálu $x(t)$.

Oba uvedené způsoby zápisu Fourierovy řady souvisí s tím, jak lze obecný fázově posunutý tvar harmonické funkce vyjádřit součtem kosinové a sinové složky.

Je-li $x(t)$ sudá, tj. $x(t) = x(-t)$, pak $b_n = 0$ pro všechna n . Na rozvoji sudé funkce se tedy podílejí pouze kosinové, tj. sudé složky. Podobně, je-li $x(t)$ lichá, tj. $x(t) = -x(-t)$, je pro všechna n a $n = 0$. K rozvoji liché funkce $x(t)$ proto přispívají pouze liché sinové složky.

Když podrobněji pohlédneme definiční vztahy (2.67) pro koeficienty Fourierova rozvoje a připomeneme si vztahy pro vzájemnou korelaci dvou funkcí, především vztah (2.52) pro korelaci dvou periodických funkcí, vidíme, že vyjadřují hodnotu korelační funkce pro $\tau = 0$ mezi analyzovaným průběhem $x(t)$ a průběhem harmonických funkcí kosinus a sinus s nulovou počáteční fází a s frekvencí, která se rovná celočíselným násobkům úhlového kmitočtu základní harmonické složky dané periodou rozkládané funkce $x(t)$. Jinými slovy amplitudy harmonických složek, ze kterých se analyzovaná funkce $x(t)$ skládá, jsou dány velikosti korelace mezi funkcí $x(t)$ a danými harmonickými složkami. Aby se do výpočtu korelace nepromítal vliv dalších harmonických funkcí (s jinou frekvencí), je třeba, aby funkce, na které daný průběh rozkládáme, tzv. báze funkce (v případě Fourierovy řady funkce harmonické) byly ortogonální nad daným intervalem.

Pokud preferujeme pro vyjádření harmonického průběhu komplexní exponenciálu, lze Fourierovu řadu psát ve tvaru

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\Omega t}, \quad (2.72)$$

kde \dot{c}_n jsou komplexní **Fourierovy koeficienty** definované vztahem

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt \quad (2.73)$$

a $\Omega = 2\pi/T$ je opět úhlový kmitočet základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$. Modul komplexního Fourierova koeficientu \dot{c}_n určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

Pro $n = 0$ je

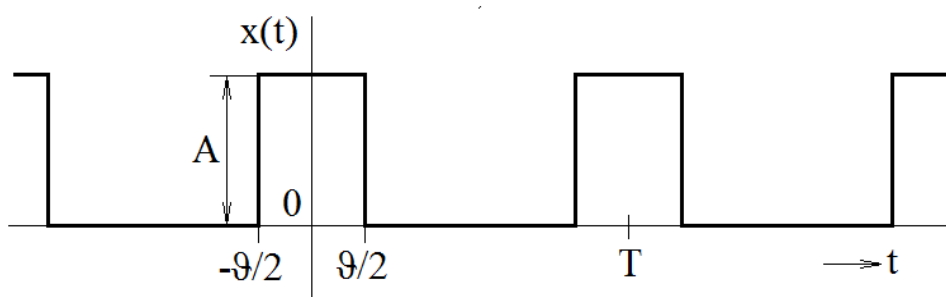
$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot dt, \quad (2.74)$$

což je střední hodnota (stejnoseměrná složka) funkce $x(t)$.

Pro reálné funkce $x(t)$ je $\dot{c}_{-n} = \dot{c}_n^*$ (symbolem $*$ označujeme komplexně sdruženou hodnotu).

Příklad:

Určeme vlastnosti jednotlivých harmonických složek, z nichž se skládá obdélníkový pulz (obr.2.22) o základní periodě T , době trvání jednotlivých impulzů ϑ a výšce A . Nechť je první z impulzů umístěn symetricky kolem počátku časové osy.



Obr.2.22 Zadání obdélníkového pulzu

Řešení:

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

$$I(n\Omega) = \int_{-a}^a e^{\pm jn\Omega t} dt. \quad (2.75)$$

Pro $n = 0$ je

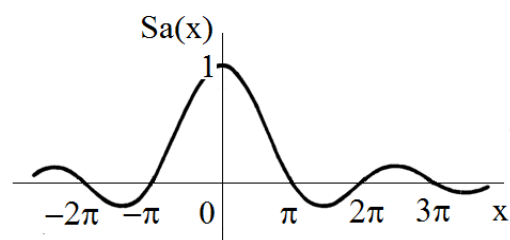
$$I(0) = \int_{-a}^a e^{\pm j0\Omega t} dt = \int_{-a}^a dt = 2a \quad (2.76)$$

a pro $n \neq 0$

$$I(n\Omega) = \int_{-a}^a e^{\pm jn\Omega t} dt = \left[\frac{e^{\pm jn\Omega t}}{\pm jn\Omega} \right]_{-a}^a = \frac{e^{jn\Omega a} - e^{-jn\Omega a}}{jn\Omega} = \frac{2}{n\Omega} \cdot \frac{e^{jn\Omega a} - e^{-jn\Omega a}}{2j} = 2a \cdot \frac{\sin n\Omega a}{n\Omega a}. \quad (2.77)$$

Tvar vypočítané funkce $Sa(x) = \sin(x)/x$ je na obr. 2.23. Funkce je primárně dána průběhem funkce $\sin(x)$, je však tlumena s lineárním růstem hodnoty x ve jmenovateli zlomku. Pro určení hodnoty $Sa(0) = 1$ použijeme limitu výrazu $\sin(x)/x$ pro $x \rightarrow 0$, což lze snadno spočítat podle l'Hospitalova pravidla.

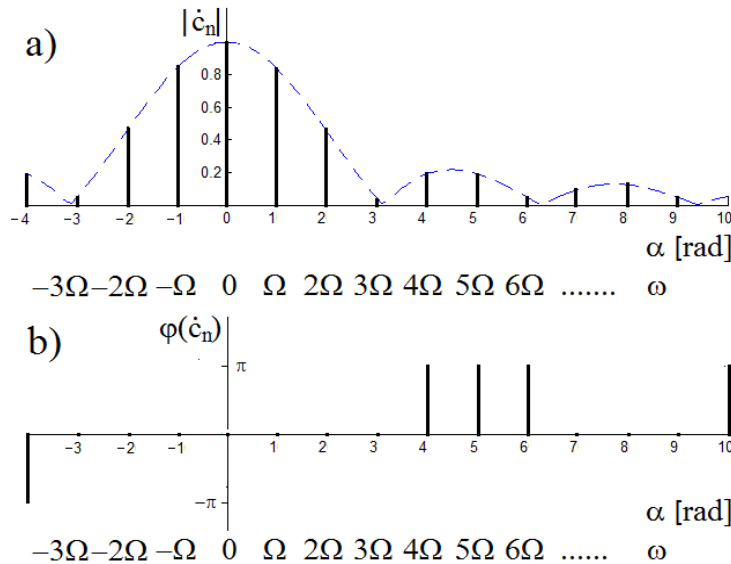
S tímto výsledkem lze spočítat Fourierovy koeficienty zadaného obdélníkového pulzu podle následujícího postupu



Obr.2.23 Průběh funkce $Sa(x) = \sin(x)/x$

$$\begin{aligned}\dot{c}_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-9/2}^{9/2} A \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A}{T} \int_{-9/2}^{9/2} e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \dots = \frac{A}{T} \cdot 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \text{Sa}\left(\frac{9}{2} n\Omega\right) = A \cdot \frac{9}{T} \cdot \text{Sa}\left(\frac{9}{2} n\Omega\right) = A \cdot \frac{9}{T} \cdot \text{Sa}\left(n\frac{9}{T} \frac{\pi}{T}\right).\end{aligned}\quad (2.78)$$

Koeficienty \dot{c}_n tedy nabývají hodnot funkce $\text{Sa}(x)$ pro diskrétní hodnoty argumentu $9n\Omega$ vynásobené výrazem $A9/T$, tj. plochou jednoho impulzu normalizovaného na jednotku periody. Protože koeficienty c_n jsou obecně komplexní, lze jejich hodnoty vyjádřit pomocí závislosti jejich modulů a fází na frekvenci jednotlivých harmonických složek. Tyto závislosti označujeme jako **amplitudové (modulové)** a **fázové frekvenční spektrum periodického signálu**. Protože jsme vycházeli z exponenciálního tvaru Fourierovy řady, je třeba předpokládat jak kladné, tak záporné hodnoty n a tím uvažovat frekvenční složky o kladných i záporných frekvencích. Vzhledem k tomu, že hodnoty koeficientů počítáme jen pro určité kmitočty, které jsou celočíselnými násobky kmitočtu základní harmonické složky, je **spektrum** této funkce a všech **periodických funkcí diskrétní (čárové)**.



Obr.2.24 (a) Amplitudové (modulové) a (b) fázové frekvenční spektrum obdélníkového pulzu symetrického podle počátku časové osy.

Grafické znázornění hodnot modulů a fází koeficientů c_n pro obdélníkový pulz podle zadání je na obr.2.24. Obě části spektra, tj. amplitudové i fázové jsou díky periodicitě analyzované funkce diskrétní, resp. čárové. To znamená, že jsou definovány pouze pro určité frekvence, které jsou rovny celočíselným násobkům základní harmonické frekvence $\Omega = 2\pi/T$, kde T je základní perioda analyzovaného signálu. Jednotlivé amplitudové spektrální čáry nabývají hodnot právě rovných hodnotám obálkové funkce reprezentované čárkovanou čarou, která je dána formulí

$$\left| A \cdot \frac{9}{T} \cdot \text{Sa}\left(\frac{9}{2} \omega\right) \right|.$$

Protože amplituda musí být kladná, je obálková funkce určena absolutní hodnotou. Nulové hodnoty nabývá pro argumenty funkce $\text{Sa}(x)$ rovné celočíselným násobkům π , tj.

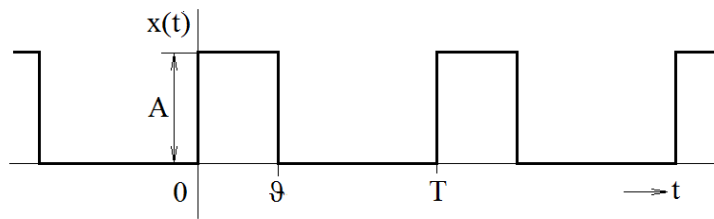
$$\frac{9}{2} \omega_0 = \pm k\pi$$

a tedy pro frekvenci

$$\omega_0 = \pm k \frac{2\pi}{9}.$$

Jak plyne ze vztahu (2.78), jsou hodnoty Fourierových koeficientů ryze reálné a nabývají kladných i záporných hodnot podle průběhu funkce $\text{Sa}(x)$. Zobrazeno v komplexní rovině to

znamená, že fáze koeficientů je nulová, pokud jsou jejich hodnoty kladné a rovny hodnotě π (180°), resp. $-\pi$ (-180°) na záporné frekvenční poloose, pokud jsou hodnoty Fourierových koeficientů záporné. □□□



Obr.2.25 Zadání posunutého obdélníkového pulzu

Příklad:

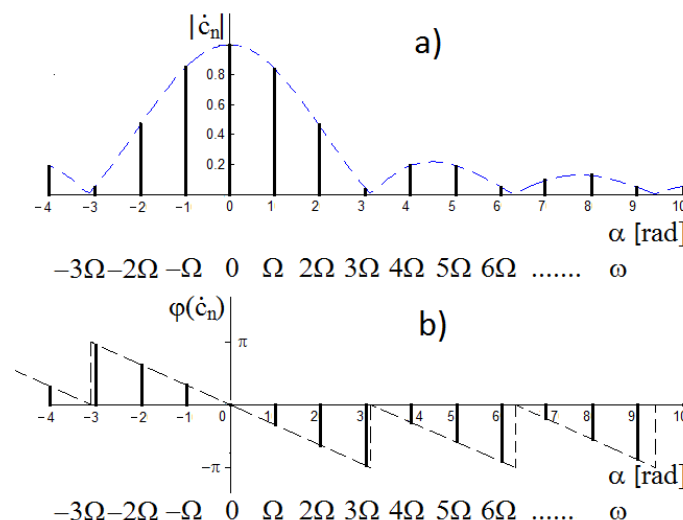
Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy (obr.2.25)?

Řešení:

V tomto případě spočítáme Fourierovy koeficienty následovně

$$\begin{aligned}\dot{c}_n &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^\Theta A \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A}{T} \int_0^\Theta e^{-jn\Omega t} dt = \frac{A}{T} \left[-\frac{1}{jn\Omega} e^{-jn\Omega t} \right]_0^\Theta = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \left(-\frac{1}{jn\Omega} \cdot e^{-jn\Omega\Theta} + \frac{1}{jn\Omega} \right) = \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{jn\Omega} \cdot (1 - e^{-jn\Omega\Theta}) = \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{2}{jn\Omega} \cdot \frac{e^{jn\Omega\Theta/2} \cdot e^{-jn\Omega\Theta/2} - e^{-jn\Omega\Theta/2} \cdot e^{-jn\Omega\Theta/2}}{2} = \frac{A}{T} \cdot \frac{2}{jn\Omega} \cdot \frac{e^{jn\Omega\Theta/2} - e^{-jn\Omega\Theta/2}}{2j} \cdot e^{-jn\Omega\Theta/2} = \quad (2.79) \\ &= \frac{A}{T} \cdot \frac{2\Theta}{n\Omega\Theta} \cdot \sin(n\Omega\Theta/2) \cdot e^{-jn\Omega\Theta/2} = \frac{A\Theta}{T} \cdot \frac{\sin(n\Omega\Theta/2)}{n\Omega\Theta/2} \cdot e^{-jn\Omega\Theta/2} = A \cdot \frac{\Theta}{T} \cdot \text{Sa}\left(n\Omega \frac{\Theta}{2}\right) \cdot e^{-jn\Omega\frac{\Theta}{2}}.\end{aligned}$$

Srovnáním výsledků obou následných příkladů zjistíme, že výsledné vztahy se liší pouze v tom, že ve druhém případě výsledek násobíme ještě exponenciálním členem $\exp(-jn\Omega\Theta/2)$.



Obr.2.26 (a) Amplitudové (modulové) a (b) fázové frekvenční spektrum obdélníkového pulzu s nástupnou hranou v počátku časové osy

Co násobení tímto členem znamená? Protože komplexní exponenciála $\exp(j\alpha)$ představuje komplexní číslo s jednotkovým modulem a fází α , znamená to, že Fourierovy koeficienty již v tomto případě nejsou ryze reálná čísla, nýbrž obecně komplexní, přičemž fáze $\alpha = n\Omega\theta/2$ je přímo úměrná celočíselným násobkům základní úhlové frekvence původního periodického pulzu $\Omega = 2\pi/T$. Dosadíme-li za Ω do výrazu pro fázi $\alpha = n\Omega\theta/2$, dostaneme $\alpha = n\pi\theta/T$. Tedy, hodnoty modulů Fourierových koeficientů se nemění, pouze jejich fáze pro n -násobky základní harmonické frekvence nabývají hodnot $n\pi\theta/T$ (obr.2.26).

2.6 Rozklad spojitých neperiodických funkcí na dílčí harmonické složky – Fourierova transformace

2.6.1 Definice

Jak jsme uvedli v dřívějším textu, neperiodické funkce lze považovat za periodické s nekonečně dlouhou periodou. Protože kmitočet základní harmonické složky periodické funkce je

$$\Omega = 2\pi/T, \quad (2.80)$$

pak pro $T \rightarrow \infty$ je

$$\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} = 0. \quad (2.81)$$

Graficky to představuje zhušťování spektrálních čar s prodlužující se periodou až do limitního případu, kdy se vzdálenost mezi spektrálními čarami blíží limitně nule. Pro neperiodický signál tedy budou spektrální čáry na sebe navazovat, z diskrétní reprezentace úhlové frekvence jednotlivých harmonických složek se stává veličina spojitá a definiční sumační vztah pro Fourierovu řadu (viz např. (2.72)) přechází na vztah integrační, kde koeficienty \dot{c}_n určíme na základě následující úvahy.

Ve vztahu (2.73), tj.

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

je $T = 2\pi/d\omega$ a tedy pro limitní rozdíl dvou sousedních frekvencí $d\omega \rightarrow 0$ je $T \rightarrow \infty$ a $n\Omega \rightarrow \omega$. Meze integrálu budou pro nekonečně dlouho trvající funkci $-\infty$ a $+\infty$. Pro $T \rightarrow \infty$ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulzu nekonečně malé. Vyjádříme vztah (2.73) pro \dot{c}_n v limitním tvaru a dostáváme

$$\dot{c}_\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (2.82)$$

Potom se definiční vztah Fourierova rozkladu transformuje do podoby

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \cdot e^{j\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.83)$$

kde vztah

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (2.84)$$

pro výpočet funkce $\dot{X}(\omega)$, kterou nazýváme *spektrální funkcí* nebo *spektrální hustotou* funkce $x(t)$, nazýváme **Fourierovu transformaci**. Lineární integrální Fourierova transformace převádí funkci $x(t)$ z časové domény na funkci $\dot{X}(\omega)$ v kmitočtové oblasti. Aby bylo možné Fourierovu transformaci spočítat, stačí, aby funkce $x(t)$ byla absolutně integrovatelná na celém definičním intervalu $(-\infty, \infty)$ ³⁸. Spektrální funkce už nevyjadřuje skutečné amplitudy jednotlivých harmonických složek signálu jako v případě rozkladu pomocí Fourierovy řady, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Vztah (2.83) definuje inverzní relaci, tj. způsob výpočtu časového průběhu signálu z jeho spektrální funkce. Tento výpočet nazýváme *inverzní (zpětnou) Fourierovou transformací*.

2.6.2 Vlastnosti Fourierovy transformace

Bez odvození a podrobnějších vysvětlujících komentářů uveďme následující základní vlastnosti Fourierovy transformace (zápisem $x(t) \sim \dot{X}(\omega)$ vyjadřujeme, že $\dot{X}(\omega)$ je spektrální funkcí funkce $x(t)$):

- **linearita - princip superpozice**

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &\sim \dot{X}_1(\omega) + \dot{X}_2(\omega); \\ a \cdot x(t) &\sim a \cdot \dot{X}(\omega); \end{aligned} \quad (2.85)$$

- **změna znaménka**

$$x(-t) \sim \dot{X}^*(\omega); \quad (2.86)$$

- **změna měřítka**

$$x(t/a) \sim a \cdot \dot{X}(a\omega), \text{ kde } a > 0; \quad (2.87)$$

- **translace funkce**

$$x(t-\tau) \sim \dot{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}; \quad (2.88)$$

- **transpozice spektra**

$$x(t) \cdot e^{-j\Omega t} \sim \dot{X}(\omega - \Omega). \quad (2.89)$$

2.6.3 Hrstka příkladů na konec

Příklad:

Určeme spektrální funkci jednotkového skoku.

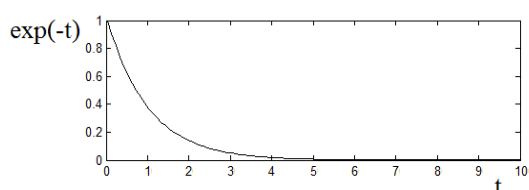
Řešení:

Jednotkový skok $\sigma(t)$ bohužel nevyhovuje podmínce absolutní integrovatelnosti, tzn. že neexistuje Fourierův integrál. Pomůžeme si proto pomocí exponenciální funkce

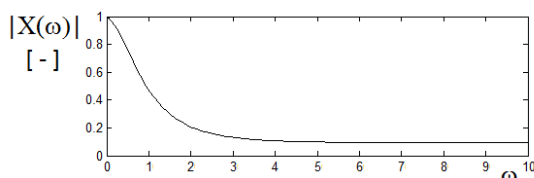
$$\begin{aligned} x(t) &= A \cdot e^{-\beta t}, \quad \text{pro } t \geq 0; \\ x(t) &= 0, \quad \text{pro } t < 0. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Protože funkce má nenulový průběh pouze pro $t \geq 0$, lze použít Fourierův integrál pouze v mezích od 0 do ∞ . Je tedy

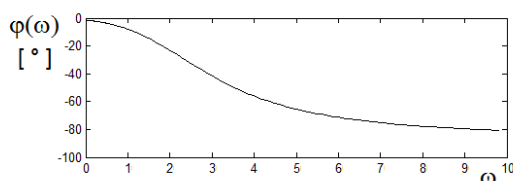
³⁸ Uvidíme záhy při výpočtu spektrální funkce jednotkového skoku, že tato dostatečná podmínka není zcela nutná a lze ji ještě jistým zobecněním zeslabit.



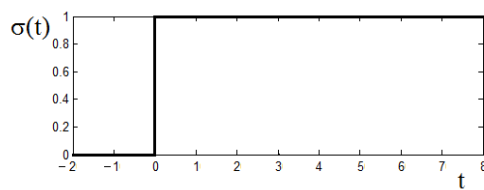
a)



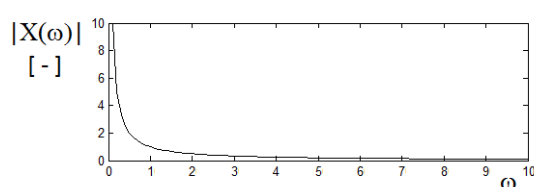
b)



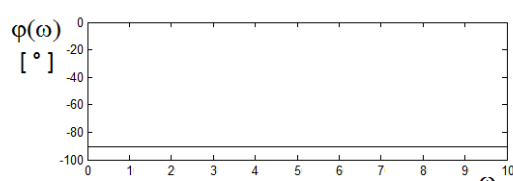
Obr.2.27 Časový průběh a spektrální funkce exponenciály $e^{-\beta t}$, $\beta = 1$



a)



b)



Obr.2.28 Časový průběh a spektrální funkce jednotkového skoku

$$\dot{X}(\omega) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{\beta + j\omega}. \quad (2.91)$$

Za jednotkový skok lze považovat výše uvedenou exponenciální funkci za předpokladu, že útlum $\beta = 0$ a koeficient $A = 1$. Potom

$$\dot{X}_{\sigma}(\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad (2.92)$$

a tedy

$$|\dot{X}_{\sigma}(\omega)| = \frac{1}{\omega} \quad \text{a} \quad \varphi_{\sigma}(\omega) = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.93)$$

□□□

Příklad:

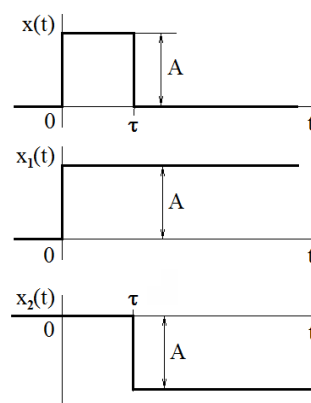
Určete spektrální funkci obdélníkového impulzu o výšce A , době trvání τ a s náběžnou hranou v počátku časové osy.

Řešení:

Obdélníkový impulz o požadovaných vlastnostech můžeme zkonstruovat ze vzájemně posunutých skokových funkcí, jak je znázorněno na obr.2.29. Spektrum jednotkového skoku jsme spočítali v předchozím příkladu a co se spektrem mimo jiné udělá posunutí v čase řeší kap.2.6.2. Tedy platí

$$x(t) = A \cdot \sigma(t) - A \cdot \sigma(t - \tau). \quad (2.94)$$

Potom je



Obr.2.29 Konstrukce obdélníkového impulzu ze vzájemně posunutých skokových funkcí

$$\begin{aligned}\dot{X}(\omega) &= A \left(\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} \right) = \\ &= A \cdot \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau/2} = \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2} \cdot e^{-j\omega\tau/2} = A \cdot \tau \cdot \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-j\omega\tau/2}.\end{aligned}\quad (2.95)$$

Z toho plyne, že modul spektrální hustoty je dán vztahem

$$|X(\omega)| = A \cdot \tau \cdot \left| \text{Sa} \left(\frac{\omega\tau}{2} \right) \right|. \quad (2.96)$$

Modul spektrální funkce je dán průběhem funkce $\text{Sa}(\omega\tau/2)$. Nulové hodnoty nabývá tato funkce pro hodnoty argumentu rovny celočíselným násobkům π , tj. pro

$$\omega\tau/2 = k\pi, k=1,2,\dots, \quad (2.97)$$

resp.

$$2\pi f\tau/2 = k\pi \quad (2.98)$$

a tedy

$$f = k/\tau. \quad (2.99)$$

To znamená, že čím je obdélníkový impulz užší, tím plošší je jeho modulová spektrální funkce.

Fázové spektrum je dáno součtem funkce

$$\varphi_1(\omega) = \omega\tau/2 \quad (2.100)$$

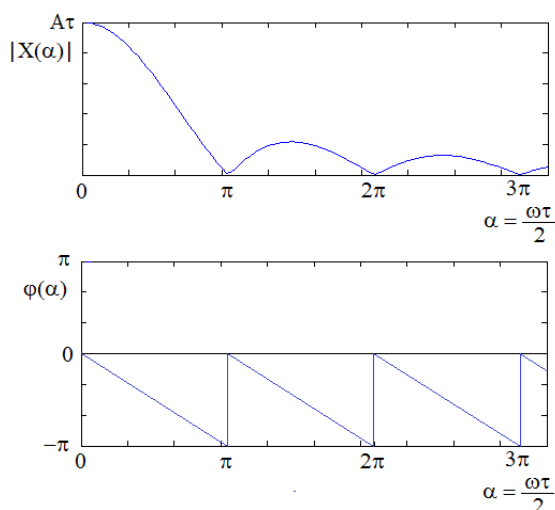
a fáze vyplývající ze změny znaménka funkce. □□□

Příklad:

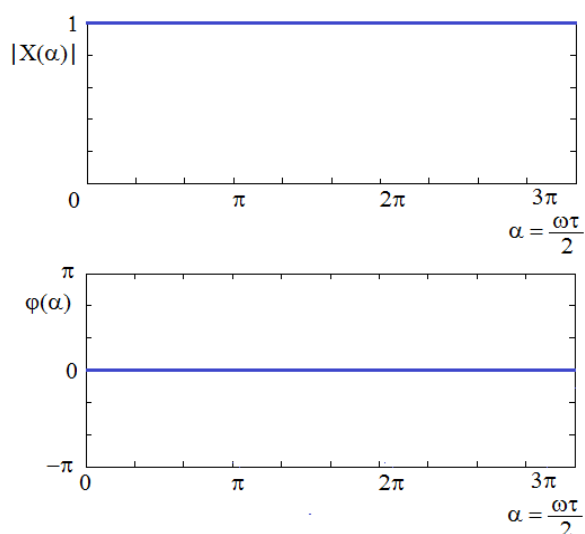
Určete spektrum Diracova impulzu.

Řešení:

Diracův impulz má z pohledu svého vztahu k funkcím některé poněkud nestandardní vlastnosti. Zkusme proto vyřešit úlohu raději jednoduchou úvahou na základě dříve dosažených výsledků.



Obr.2.30 Spektrální funkce obdélníkového impulzu - a) modulové spektrum; b) fázové spektrum



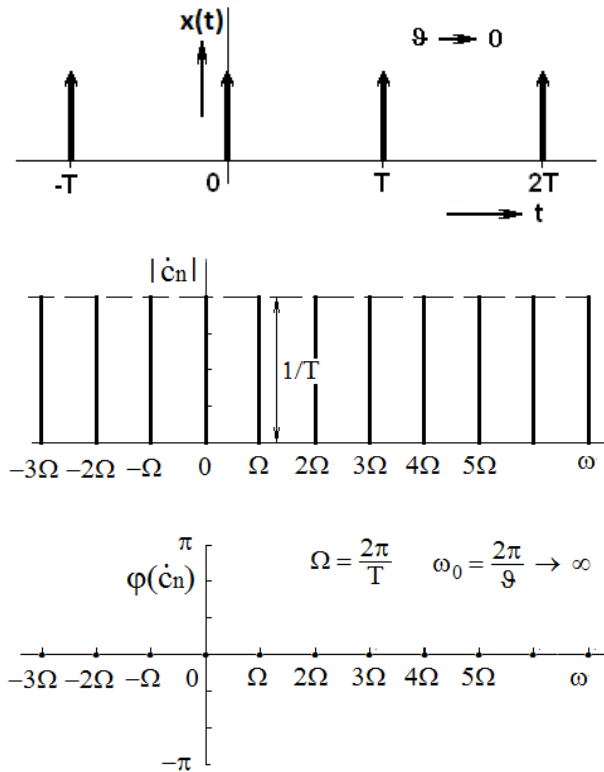
Obr.2.31 Spektrální funkce jednotkového impulzu

Protože jednotkový impulz můžeme považovat za obdélníkový impulz s limitně nulovou šířkou a limitně nekonečnou výškou, jejichž součin je roven 1, pak součin $A \cdot \tau$ definující multiplikativní koeficient u modulové spektrální funkce obdélníkového impulzu (vztah (2.95)) je roven jedné a první nulové hodnoty dosahuje spektrální funkce pro $\omega \rightarrow \infty$. To znamená, že modul spektrální funkce jednotkového impulzu je roven 1 pro všechny frekvence a fáze je v celém frekvenčním rozsahu nulová.

Můžeme také s využitím (2.84) a (2.18) psát, že

$$\begin{aligned}\dot{\Delta}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= e^{-j\omega 0} = 1.\end{aligned}$$

□□□



Obr.2.32 Časový průběh a spektrum periodického sledu jednotkových impulzů

Příklad:

Určete spektrum periodického sledu Diracových impulzů s periodou T .

Řešení:

Podobně jako v případě jednorázového jednotkového impulzu, lze i v tomto případě nalézt řešení rozбором dříve řešeného případu periodického obdélníkového pulzu.

Z periodického charakteru signálu vyplývá, že jeho spektrum musí být diskrétní, nabývá hodnot pouze pro frekvence rovné celočíselným násobkům základní úhlové frekvence signálu, která je dána periodou T opakování impulzů, tj. $n\Omega = 2\pi n/T$. Protože hodnoty modulů Fourierových koeficientů \dot{c}_n obdélníkového pulsu jsou dány hodnotami funkce $Sa(\vartheta\omega/2)$ (připomeňme obr.2.24) a protože doba trvání jednotlivých impulzů ϑ jde limitně k nule, posouvá se první nulová hodnota funkce $Sa(\vartheta\omega/2)$ limitně do nekonečna. Moduly jednotlivých koeficientů proto nabývají konstantních hodnot rovných $|\dot{c}_n| = 1/T$ a fáze je, vzhledem ke kladným reálným hodnotám koeficientů, rovna nule.

□□□

Příklad:

Předpokládejme, že funkce $x_1(t)$ má spektrální funkci $\dot{X}_1(\omega)$ a funkce $x_2(t)$ má spektrální funkci $\dot{X}_2(\omega)$. Určete vztah pro Fourierovu transformaci funkce, která se rovná konvoluci obou dílčích funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$.

Řešení:

Konvoluce $x(t)$ dvou dílčích funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ je dána podle vztahu

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau.$$

Fourierovu transformaci funkce $x(t)$ spočítáme jako

$$\begin{aligned}\dot{X}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau \right) \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \cdot d\tau.\end{aligned}\quad (2.101)$$

Vnitřní integrál představuje Fourierovu transformaci funkce $x_2(t)$ posunutou v čase o τ . Podle vztahu (2.88) pro spektrum takové funkce platí

$$x(t - \tau) \sim \dot{X}(\omega) \cdot e^{-j\omega \tau}.$$

Dosadíme-li z tohoto výrazu do (2.101), dostaneme

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot \dot{X}_2(\omega) \cdot e^{-j\omega \tau} \cdot d\tau. \quad (2.102)$$

Protože $\dot{X}_2(\omega)$ není funkcí τ , lze tento člen vytknout před integrál

$$\dot{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot \dot{X}_2(\omega) \cdot e^{-j\omega \tau} \cdot d\tau = \dot{X}_2(\omega) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot e^{-j\omega \tau} \cdot d\tau. \quad (2.103)$$

V tomto případě integrál v druhé části vztahu (2.103) představuje Fourierovu transformaci funkce $x_1(\tau)$, resp. $x_1(t)$, takže můžeme psát, že

$$\dot{X}(\omega) = \dot{X}_1(\omega) \cdot \dot{X}_2(\omega). \quad (2.104)$$

□□□

3 Signály diskrétní v čase

3.1 Pár úvodních myšlenek, aneb co bychom v třetí kapitole chtěli

Za prvé doufáme, že čtenář tohoto textu chápe všechny pojmy z předchozí kapitoly a rozumí konceptu vyjádření vlastností časových funkcí ve spektrální oblasti. Protože svět zpracování dat a signálů je v současnosti již téměř výhradně orientován na metody číslicového zpracování, je potřeba vysvětlit princip přechodu od spojitých signálů k jejich diskrétní reprezentaci – **vzorkování**. Zabýváme-li se zde zpracováním především informace závislé na čase, pak výsledek vzorkování nazýváme podle aplikační oblasti **diskrétním signálem**, nebo **časovou řadou**. V každém případě je ale reprezentován posloupností hodnot zpravidla získaných z původní spojitě veličiny.

Poté bychom chtěli čtenáře seznámit s některými základními typy diskrétních posloupností, jejich vlastnostmi a operacemi s nimi, z nich zejména s diskrétní konvolucí a korelací. V mnohém se bude zdát, že opakujeme fakta z předchozí kapitoly, ale současně se budeme snažit upozornit na odlišnosti diskrétního přístupu – v některých případech to bude jednodušší, v některých naopak složitější. A když toto všechno čtenář zvládne, přikročíme podobně, jak tomu bylo v předchozí kapitole, k vyjádření časových řad ve spektrální oblasti.

3.2 Vzorkování

3.2.1 Několik obecných definic na úvod

Vzhledem k zaměření těch, jimž je tento text určen především, musíme začít trochu obecněji.

Vzorkování je postup výběru jednotlivých pozorování, na jehož základě získáváme informaci o vlastnostech sledované skutečnosti či jevu. Každé pozorování může obecně zahrnovat více vlastností (věk, diagnóza onemocnění, velikost napětí, ...), které mohou být použity k identifikaci daného jevu či jeho části.

Pokusíme-li se o zobecnění definice pojmu vzorkování, pak můžeme konstatovat, že **vzorkováním rozumíme postup výběru určité podmnožiny (vzorku) dané množiny (signálu, populace, dat, materiálu) tak, aby vlastnosti vybraného vzorku (dostatečně) přesně reprezentovaly vlastnosti celé množiny (signálu, populace, dat, materiálu)**.

V této definici může být problém s vymezením pojmu **dostatečně přesné** reprezentace vzorkovaného děje. Protože vzorkování je postup, který je součástí technické praxe, zejména spojené s oblastí zpracování informace, signálů jedno- či vícerozměrných (obrazů, videosekvencí, apod.), stejně tak jako praxe statistické, např. při kontrole jakosti výroby či léčebného procesu nebo třeba i při průzkumu veřejného mínění, budou požadavky na přesnost vyjádření vzorkovaného děje vyplývat z aplikací.

Příklady:

- volba frekvence a místa odběru pro hodnocení úrovně znečištění vodních toků;
- volba parametrů digitalizace obrazu pro jeho přenos či archivaci;
- volba tématu a množiny respondentů při průzkumu veřejného mínění;
- výběr výrobků při výstupní kontrole kvality výroby;
- výběr pacientů pro odhad vývoje daného onemocnění.

Každá z obou aplikačních oblastí má svá specifika v terminologii i přístupech. Např. statistická analýza pojímá vzorkování poněkud šířeji, i jako součást plánování experimentu a vychází z existence variability dat, jejíž příčiny nemusí být vždy jasné a navíc je variabilita považována za víceméně nežádoucí složku, kterou není nutné v navzorkovaných datech zachovávat. Lze proto v statistických publikacích nalézt i definici říkající, že **vzorkování je postup selekce jednotlivých pozorování s cílem získat určitou znalost o dané populaci, zejména pro účely statistické inference**³⁹. Tedy zatímco oblast zpracování signálů předpokládá, že veškerá informace v datech zůstane zachována (tzn., že třeba za určitých podmínek (omezené frekvenční spektrum) lze původní průběh signálu z navzorkovaných dat beze zbytku zrekonstruovat), vzorkování v oblastech připouštějících určitou neurčitost v datech netrvají na možnosti zrekonstruovat původní data, nýbrž pouze požadují, aby závěry vyvozené z pořízených dat byly správné.

Podle všech výše uvedených definic je vzorkování pojem označující proces pořizování **vzorků**, prvků množiny určené definičním oborem daných pozorování a určování funkční hodnoty, která vzorek charakterizuje.

Definiční obor může být tvořen např. množinou všech onkologických pacientů v České republice (statistika často používá pro označení této definiční množiny pojem populace), všechny automobily vyrobené ve Středočeském kraji, všechny vodní toky a plochy v Evropě, barevná fotografie. Z uvedených příkladů plyne, že definiční obor může být jak množina spojitá, tak i diskrétní.

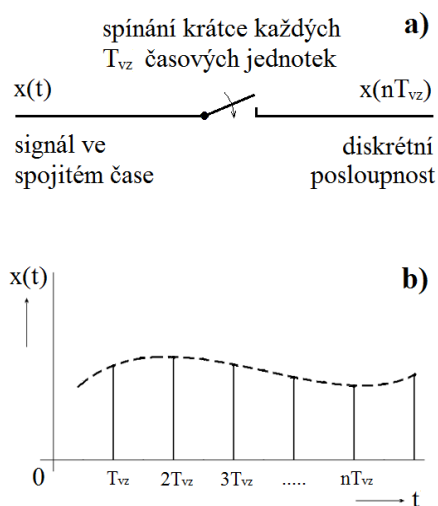
Vzorky musí být vybrány tak, aby bylo možné z funkčních hodnot jejich vlastností určit hodnoty funkce vlastností v celém definičním oboru, podle aplikační oblasti, buď zcela přesně, nebo alespoň odhadnout s dostatečnou požadovanou přesností, příp. alespoň odhadnout jejich globální charakteristiky.

Pro kvalitu rekonstrukce funkce vlastností je rozhodující způsob výběru vzorků. Strategie jejich výběru může být určena nějakým pevně stanoveným deterministickým pravidlem, nebo může být i náhodná.

3.2.2 Vzorkování signálů - - vzorkovací teorém

Vzorkováním signálu rozumíme činnost, při které z průběhu určité veličiny, která je definována na spojitém definičním oboru, vybíráme hodnoty pouze v určitých časových okamžicích, resp. pro určité hodnoty prostorových souřadnic. Ty hodnoty časových či prostorových souřadnic mohou být rozmístěny v definičním prostoru obecně nerovnoměrně, z hlediska práce s daty je ale výhodnější, pokud jsou souřadnice vzorků rozmístěny rovnoměrně (a v tom případě lze i teoreticky dovodit pravidlo pro maximální vzdálenost mezi každými dvěma vzorky).

Předpokládejme nadále (bez ztráty obecnosti), že nezávislou proměnnou je čas. Pak princip



Obr.3.1 (a) Princip vzorkování, (b) spojitá funkce a její navzorkovaná varianta.

³⁹ **Inference** (lat. *inferre* vnášet, přinášet, dedukovat; *in-* do, *ferre* nést, nosit) ~ usuzování, odvozování výroků z jiných souvislostí. Pojem používán ve filosofii, matematice, statistice a logice, psychologii, atp. V psychologii můžeme použít tohoto pojmu pro rozpoznání právě prožívaného emočního či afektivního stavu pozorované osoby z výrazu jejího obličej, v informatice se používá pro konstrukci substitučních pravidel gramatik ze znalosti slov formálního jazyka, ...

vzorkování průběhu jakékoliv spojité proměnné je znázorněn na obr.3.1, kde jednotlivé vzorky jsou od sebe vzdáleny o čas T_{vz} . Tuto hodnotu nazýváme **vzorkovací periodou**.

Aby bylo možné zjednodušit analýzu vlivu vzorkování na vlastnosti vzorkovaného signálu, je navzorkovaná verze původní spojité veličiny $x(t)$ vyjadřována ve tvaru $x(t) \cdot p(t)$, kde $p(t)$ je periodický sled jednotkových impulsů definovaný jako

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_{vz}). \quad (3.1)$$

Z toho pro navzorkovaný signál platí

$$x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_{vz}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \delta(t - nT_{vz}). \quad (3.2)$$

Tento vztah říká, že navzorkovaný signál $x(t)p(t)$ je dán sledem impulsů, jejichž úrovně jsou rovny hodnotám vzorků původního signálu v časech nT_{vz} . (Vzorkování popsané vztahem (3.2) označujeme jako **ideální vzorkování**.)

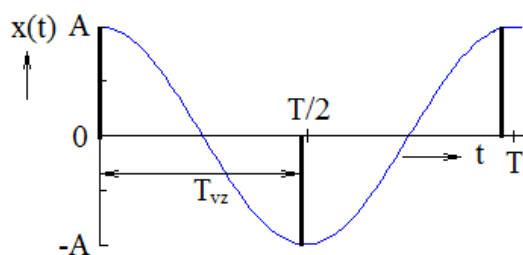
Podstatné z hlediska vzorkování je stanovení délky vzorkovací periody T_{vz} , resp. vzorkovací frekvence $f_{vz} = 1/T_{vz}$ nebo $\omega_{vz} = 2\pi/T_{vz}$.

Minimální hodnota **frekvence vzorkování**, která je dána převrácenou hodnotou vzorkovací periody, je určena tzv. **vzorkovacím teorémem** (často spojovaný se jmény Clauda E. Shannona, Harry T. Nyquista, příp. Vladimira A. Kotelnikova⁴⁰), který říká, že přesná rekonstrukce spojitého, frekvenčně omezeného signálu z jeho vzorků je teoreticky možná tehdy, pokud byl vzorkován frekvencí f_{vz} nejméně dvakrát vyšší, příp. rovnou maximální frekvenci rekonstruované veličiny. Vyjádřeno matematickým vztahem, musí platit

$$f_{vz} = \frac{1}{T_{vz}} > 2f_{\max}, \quad (3.3)$$

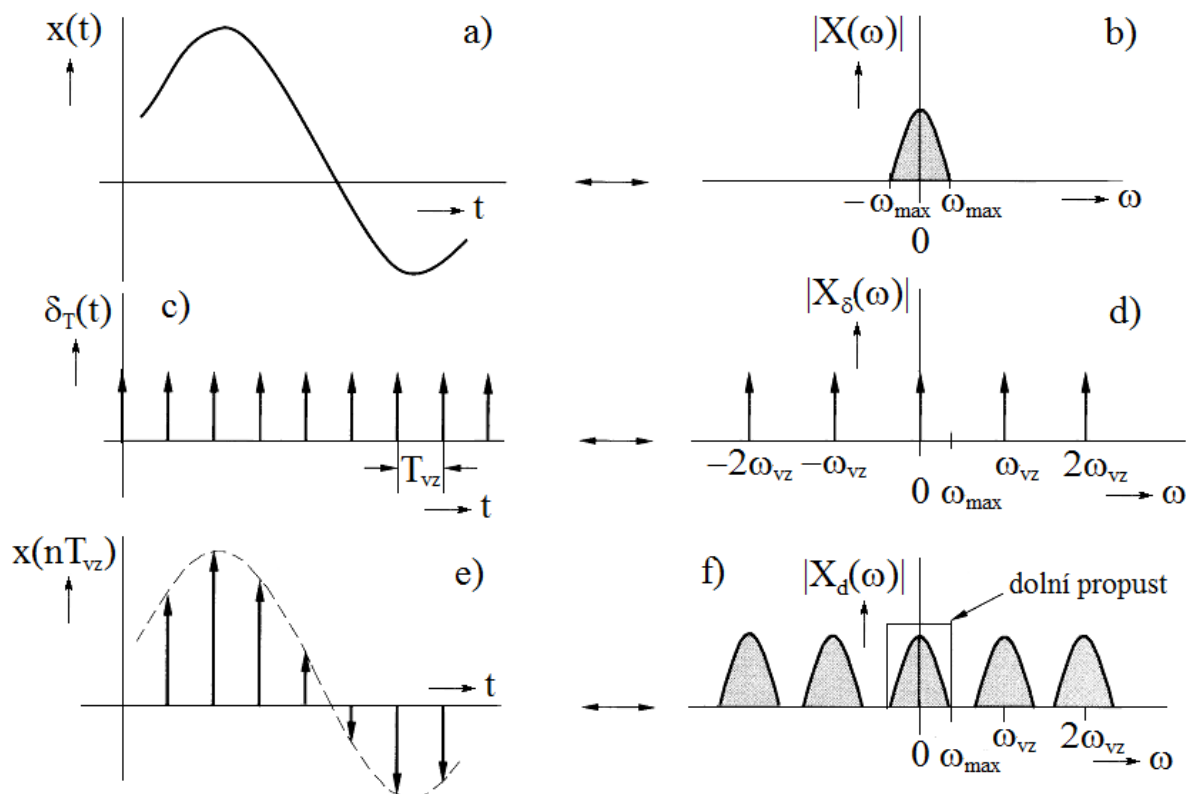
kde f_{\max} je frekvence harmonické složky, která má nejvyšší frekvenci ze všech harmonických složek, které jsou v dané veličině obsaženy.

Proč tomu tak je, lze samozřejmě matematicky odvodit. Nejdříve se ale spokojme jen s následujícím poměrně prostým zdůvodněním. Jak jsme si dříve uvedli, harmonická funkce je dána třemi parametry - amplitudou, frekvencí a počáteční fází. Abychom mohli tyto tři parametry určit, potřebujeme tři rovnice pro hodnoty funkce ve třech různých časech z jedné periody (protože je harmonická funkce periodická). Mají-li být jednotlivé časové okamžiky vzdáleny rovnoměrně, je nutné, aby doba mezi nimi, tj. vzorkovací perioda, byla menší než polovina periody harmonické funkce (obr.3.2). Má-li toto pravidlo platit i pro harmonickou složku signálu s nejvyšší frekvencí, musí být vzorkovací perioda menší, než je polovina periody této harmonické složky.



Obr.3.2 Princip zdůvodnění vzorkovacího teorému

⁴⁰ **Claude Elwood Shannon** (*1916, Petoskey, Michigan, USA; + 2001, Boston, USA), americký elektrotechnický inženýr a matematik, zakladatel teorie informace; **Harry Theodor Nyquist** (*1889, Stora Kil, Švédsko; +1976, Harlingen, Texas, USA), švédský elektrotechnický inženýr žijící v USA, zabýval se teorií signálů a teorií řízení; **Vladimir Alexandrovič Kotelnikov** (*1908, Kazaň, Rusko; + 2005, Moskva, Ruská federace), ruský elektrotechnický inženýr a radioastronom, místopředseda Ruské AV, předseda Nejvyššího sovětu RSFSR, zabýval se teorií signálů, harmonickou analýzou a radiastronomickým průzkumem Merkuru a Venuše.

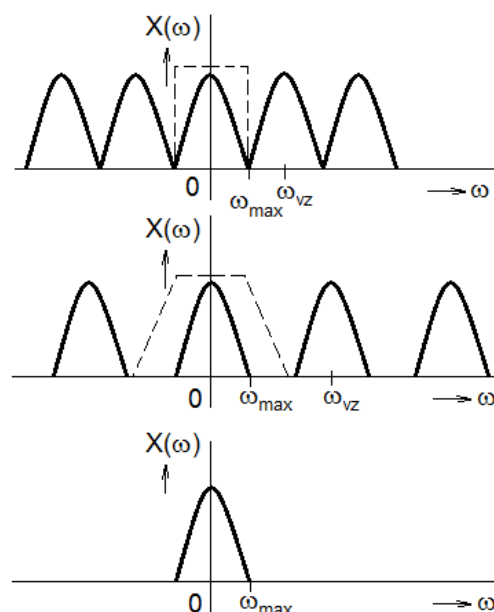


Obr.3.3 Vzorkování signálu a jeho spektrum

Trošku sofistikovanější zdůvodnění vzorkovacího teorému vychází ze spektrálních vlastností navzorkované spojité funkce.

Nechť má vzorkovaná funkce $x(t)$ (obr.3.3a) spektrum zobrazené na (obr.3.3b). Puls Diracových impulsů s periodou T má spektrum ve tvaru periodického sledu Diracových impulsů ve frekvenční oblasti s periodou ω_{vz} , tak jak bylo určeno v příkladu ke konci kap.2.6.3 a jak je zobrazeno na obr.3.3d. Protože navzorkovaná posloupnost je dána součinem původního spojitého signálu a sledu jednotkových impulsů (vztah (3.2)) je výsledné spektrum navzorkované posloupnosti dáno konvolucí obou dílčích spekter. A protože definiční vlastností jednotkového impulsu je, že výsledek jeho konvoluce se signálem je hodnota signálu v místě výskytu jednotkového impulsu, je výsledné spektrum takové, jaké je uvedeno na obr.3.3f. Má periodický charakter s periodou rovnou vzorkovací frekvenci a tvar jednotlivých segmentů odpovídá tvaru spektra vzorkovaného signálu. Digitalizace signálu tedy způsobuje periodizaci frekvenčního spektra, přičemž jednotlivé spektrální periody mají tvar spektra původního spojitého signálu. Z obrázku vyplývá, že jednotlivé segmenty spektra se nebudou prolínat za předpokladu, že maximální frekvence složek signálu není větší než polovina vzorkovací frekvence.

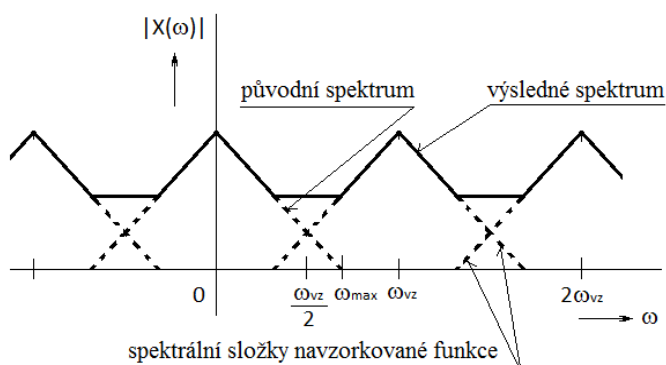
Z obr.3.3 a především z obr.3.4 vyplývá i princip možnosti jak realizovat zpětný převod diskrétní



Obr.3.4 Spektrální princip zpětného převodu diskrétní posloupnosti na spojitou veličinu

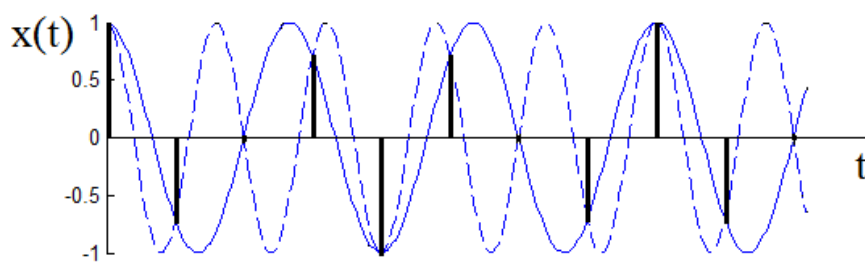
reprezentace signálu na spojitou. Dosáhnout toho lze potlačením těch částí spektra, které jsou kolem nenulových násobků vzorkovací frekvence. Toto potlačení se provádí selektivním systémem, který dokáže propustit harmonické složky signálu s nižšími frekvencemi a naopak potlačuje složky s vyššími kmitočty - takovému systému (filtru) říkáme dolní propust. Pokud by vzorkovací frekvence právě splňovala vzorkovací teorém ($f_{vz} = f_{max}$), pak by výsledné spektrum vypadalo, jak je zobrazeno na obr.3.4 dole. Z hlediska zpětného převodu by to znamenalo, že použitá dolní propust by měla mít ideální vlastnosti, tj. harmonické složky diskrétního signálu o frekvencích do $f_{vz}/2$ by měla zachovat bez jakéhokoliv zkreslení, naopak všechny harmonické složky, jejichž frekvence jsou vyšší než $f_{vz}/2$ by měla beze zbytku odstranit. Takový ideální systém bohužel sestavit nelze a tak je potřeba při řešení reálných úloh vytvořit vzorkováním poněkud méně vyhraněnou situaci, tedy používat vzorkovací frekvenci vyšší než přesně definuje vzorkovací teorém.

V praxi se vzorkovací frekvence volí dvakrát větší než maximální frekvence obsažená v signálu plus nějaká rezerva. Např. v telekomunikacích se používá kmitočet 8 kHz pro přenos telekomunikačního signálu ve standardním pásmu od 0,3 do 3,4 kHz. U záznamu zvuku na CD je to 44,1 kHz, neboť zdravé lidské ucho slyší zvuk o frekvenci maximálně 20 kHz. U medicínských signálů je rezerva zpravidla větší – vzorkovací frekvence se zatím volí až jako 4 – 5 násobek maximální frekvence ve spektru.



Obr.3.6 Překrývání spekter vlivem nevhodné vzorkovací frekvence

podvzorkování byl měl rekonstruovaný signál nižší frekvenci ve srovnání s původním vzorkovaným signálem (obr.3.5). Ze zobrazení v kmitočtové oblasti je patrné, proč jev nazýváme překrývání spekter (obr.3.6). S požadavkem na vzorkovací frekvenci souvisí i tzv. **stroboskopický jev** způsobující, že se kola jedoucího vozu na filmovém záběru točí zpět při nevhodném poměru frekvence otáčení kola a frekvence snímků filmového záznamu. Vlivem použití nízké vzorkovací frekvence a vlivem skutečnosti, že spektrum diskrétní reprezentace signálu je periodické, dochází k tomu, že maximální frekvence diskretizované funkce překročí polovinu



Obr.3.5 Princip aliasingu – pokud je signál s vyšší frekvencí (čárkovaná křivka) podvzorkován frekvencí nižší než vyplývá ze vzorkovacího teorému, má rekonstruovaný signál frekvenci (plná čára), která vyplývá z předpokladu, že byl vzorkovací teorém respektován

vzorkovací frekvence a obě části spektra se sečítají. K čím většímu podvzorkování dojde, k tím většímu vyrovnaní výsledného spektra dochází (při daném tvaru spektrální funkce).

3.3 Základní typy matematických modelů signálů diskretních v čase

3.3.1 Konvence na začátek

Diskretizace spojitě funkce způsobuje, že danou funkci známe pouze v časových okamžicích, které jsou dány celočíselnými násobky vzorkovací frekvence. Vzorkováním jsme způsobili konverzi $x(t) \rightarrow x(nT_{vz})$. Tento zápis stále značí, že i diskretní posloupnost závisí na čase. Vzorkovací perioda je ale konstanta, proto v mnohých odborných textech bývá zvykem zapisovat vzorky diskretní posloupnosti pouze ve tvaru $x(n)$, resp. x_n . Tato forma zápisu má výhodu, že již není jednoznačně vázána na čas jako nezávislou proměnnou, může být použita pro časové řady, stejně tak, např. ve tvaru $x(n,m)$ pro popis digitálních obrazů. Na druhé straně tato výhoda může být současně i nevýhodou při snaze o vysvětlování některých dalších souvislostí, např. při převodu posloupnosti z původní primární reprezentace do spektrální. Frekvenci jsme si definovali jako počet výskytů nějaké skutečnosti za časovou jednotku. Pokud vztah k časové jednotce při definici frekvence zrušíme, můžeme se dostat do problému se srozumitelností výkladu frekvence. To je důvod, proč se občas vyskytuje zdůvodnění zkráceného zápisu založené na předpokladu jednotkové vzorkovací periody, čehož dosáhneme její normalizací. V tom případě zůstává rozměr argumentu časový (i když to na první pohled není vidět) a současně lze používat zkrácenou, pohodlnější formu zápisu. V následujícím textu budeme používat především tohoto rozšířeného způsobu zápisu (protože je lépe uvědomovat si časovou dimenzi argumentu, případně tomu odpovídající frekvenční dimenzi ve spektru). Jen tam kde to nebude dělat problémy, použijeme stručnějšího tvaru zápisu argumentu.

3.3.2 Periodické posloupnosti

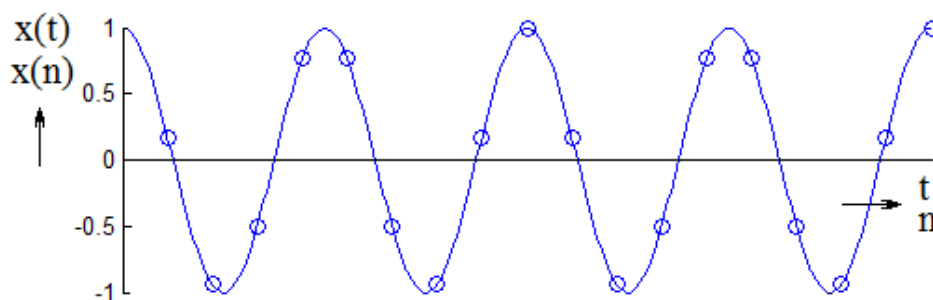
Diskretní posloupnost $x(nT_{vz})$ je periodická s periodou NT_{vz} , právě když platí

$$x[(n+k.N)T_{vz}] = x(nT_{vz}), \text{ pro } n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.4)$$

ve zkráceném tvaru argumentu

$$x[n+k.N] = x(n), \text{ pro } n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.5)$$

Vzhledem k tomu, že periodicitu diskretních posloupností je vázána na celočíselný násobek vzorkovací periody, je logické, že vzorkovaný spojitý periodický signál s periodou T je reprezentován periodickým diskretním signálem pouze tehdy, je-li perioda T právě rovna celočíselnému N -násobku vzorkovací periody, tj. platí $T = NT_{vz}$. Pokud by tomu tak nebylo, pak dochází k prodlužování periody diskretní posloupnosti v závislosti na zbytku po celočíselném



Obr.3.7 Změna periodicity funkce po vzorkování frekvencí, která neodpovídá bezzbytkovému celočíselnému podílu $f_{vz} \div f$.

dělení T div T_{vz} . Je-li zbytek do dělení roven $\frac{1}{2}$, prodlužuje se perioda na dvojnásobek, je-li roven $\frac{1}{3}$, pak na trojnásobek, atd. Je-li poměr obou period T/T_{vz} iracionální číslo, pak je výsledná posloupnost neperiodická.

Jako příklady periodických posloupností můžeme považovat harmonické posloupnosti popsané formulí

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi f nT_{vz} + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0\right), \quad (3.6)$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \exp\left(\frac{2\pi j k}{N} + \varphi_0\right). \quad (3.7)$$

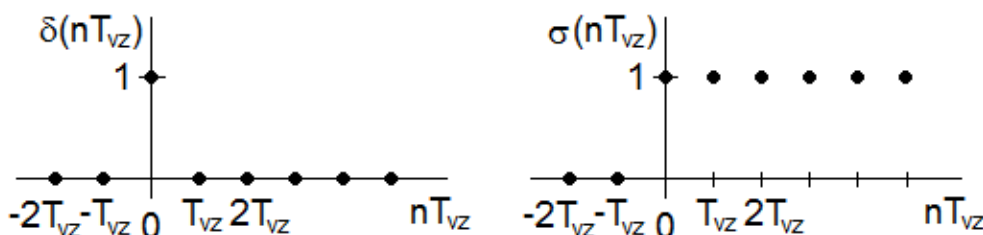
Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodický signál, protože platí

$$x[(n+N)T_{vz}] = \exp\left(\frac{j2\pi(k+N)}{N}\right) = \exp\left(\frac{j2\pi k}{N}\right) \cdot \exp(j2\pi), \quad (3.8)$$

kdy $\exp(j2\pi) = \cos(2\pi) + j \cdot \sin(2\pi) = 1 + j0 = 1$.

3.3.3 Jednorázové posloupnosti

Základními jednorázovými modely diskretních signálů, jsou stejně jako v případě spojitých funkcí, jednotkový impulz a jednotkový skok.



Obr.3.8 Diskrétní reprezentace jednotkového impulzu a jednotkového skoku

Diskrétní jednotkový impulz (též může být **Kroneckerovo**⁴² **delta**) je diskretním analogem Diracova impulzu. Je definován vztahem

$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Diskrétní jednotkový skok je definován vztahem

$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Podobně jako pro spojitou nezávisle proměnou platí i pro diskretní, že

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz}) = f(0), \quad (3.11)$$

resp.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = f(mT_{vz}). \quad (3.12)$$

⁴¹ Výsledný výraz ve vztahu (3.6) je názornou ukázkou toho, že časový faktor v definičním vztahu pro diskretní harmonickou posloupnost mizí, i když původní záměr byl ponechat jej.

⁴² **Leopold Kronecker** (*1823, Leignitz, Prusko; +1891, Berlín, Německo), německý matematik, logik a filosof matematiky. Autor výroku: „Přirozená čísla nám dal dobrý Pán Bůh, všechno ostatní je lidský výmysl.“

A také

$$\sum_{n=-\infty}^m \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz}) \quad (3.13)$$

a

$$\delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}]. \quad (3.14)$$

3.4 Základní operace s matematickými modely signálů diskrétních v čase

3.4.1 Úvodní poznámky

Na tomto místě se domníváme, že již není třeba opakovat základní principy unárních operací, jen graficky připomeňme důsledek inverze časové osy a posun v čase na obr.3.8), proto se nadále věnujme již jen důležitým binárním operacím, z nich především konvoluci a korelaci a zvláštnostem, které vyplývají z diskrétní reprezentace původně spojitých průběhů.

3.4.2 Diskrétní konvoluce

Zopakujme nejdříve, že konvoluce pro dvě spojité funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$ byla v kap.2.4.2 definována vztahem (2.31)

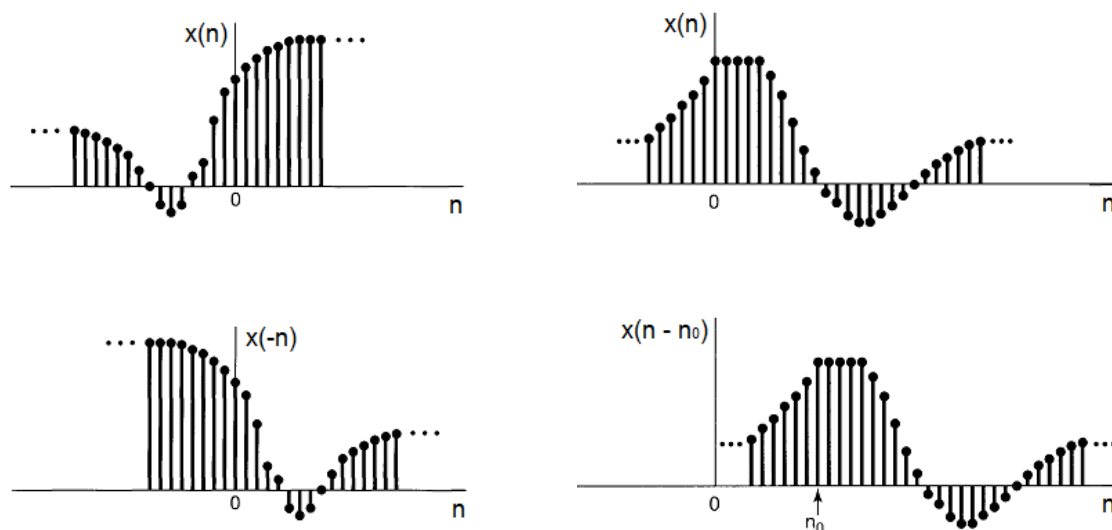
$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau.$$

Pokusíme-li se vytvořit diskrétní ekvivalent tohoto vztahu, pak i bez velkého přemýšlení lze psát

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n - m). \quad (3.15)$$

A protože konvoluce má komutativní vlastnost platí samozřejmě stejně jako ve spojitém případě i

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n - m) \cdot x_2(m). \quad (3.16)$$



Obr.3.9 Základní matematické operace se signály - inverze časové osy (vlevo), posun v čase (vpravo)

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{x}_1(m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{10} \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{13} \mathbf{x}_{14} \mathbf{x}_{15}} \\
 \mathbf{x}_2(m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{20} \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{22}} \\
 \\
 \mathbf{x}_1(m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{10} \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{13} \mathbf{x}_{14} \mathbf{x}_{15}} \\
 \mathbf{x}_2(-m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{22} \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{20}} \Rightarrow \\
 \\
 \mathbf{x}_1(m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{10} \mathbf{x}_{11} \mathbf{x}_{12} \mathbf{x}_{13} \mathbf{x}_{14} \mathbf{x}_{15}} \\
 \mathbf{x}_2(2-m) \quad \boxed{\mathbf{x}_{22} \mathbf{x}_{21} \mathbf{x}_{20}} \Rightarrow
 \end{array}$$

Obr.3.10 Schéma výpočetního algoritmu konvoluce konečných posloupností

Pro kauzální posloupnosti, tj. takové, pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$ se konvoluční vztah mění (ekvivalentně vztahu (2.42)) na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m). \quad (3.17)$$

V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položíme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$. V tom případě je

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\min(N_1-1, N_2-1)} x_1(m) \cdot x_2(n-m). \quad (3.18)$$

Algoritmus výpočtu konvoluce dvou konečných posloupností spočívá v součtu dílčích součinů prvků posloupnosti x_1 a v čase invertované a o n prvků směrem v kladné časové ose posunuté posloupnosti x_2 (obr.3.10).

Příklad

Vypočítejte konvoluci posloupnosti $x_1 = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\}$ a $x_2 = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

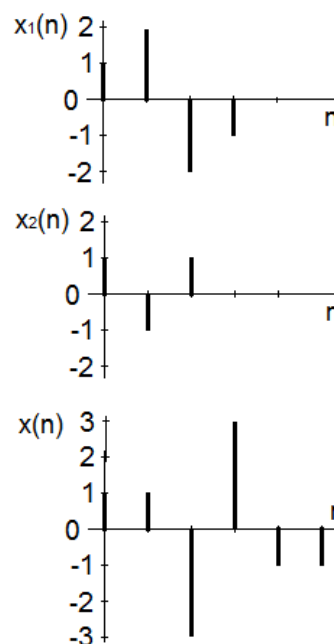
$$\begin{array}{l}
 \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} = \\
 = \begin{array}{cccc}
 (x_{10} \cdot x_{20}) & (x_{10} \cdot x_{21}) & (x_{10} \cdot x_{22}) & \\
 & (x_{11} \cdot x_{20}) & (x_{11} \cdot x_{21}) & (x_{11} \cdot x_{22}) \\
 & & (x_{12} \cdot x_{20}) & (x_{12} \cdot x_{21}) & (x_{12} \cdot x_{22}) \\
 & & & (x_{13} \cdot x_{20}) & (x_{13} \cdot x_{21}) & (x_{13} \cdot x_{22})
 \end{array}
 \end{array}$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

□□□

Příklad

Podle výše uvedeného výpočetního schématu spočítejte konvoluci dvou posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ (obr.3.11).



Obr.3.11 Zadání a řešení příkladu

Řešení:

$$\begin{array}{ccccccc} \{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} = \\ = & 1 & -1 & 1 & & & \\ & & 2 & -2 & 2 & & \\ & & & -2 & 2 & -2 & \\ & & & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -1 \end{array}$$

Výsledkem konvoluce obou posloupností je tedy posloupnost $x(n) = \{1, 1, -3, 3, -1, -1\}$ (obr.3.11). $\square\square\square$

Z obr. 3.9 i z výpočetních schémat v předchozích příkladech je zřejmé, že na začátku, ale je tomu tak i na konci výpočtu, konvoluční suma nezahrnuje všechny dílčí součiny, jak by plnohodnotně náleželo podle délky obou posloupností – nastává jistý přechodný děj.

Tento jev by bylo možné eliminovat za předpokladu periodičnosti alespoň jedné z obou posloupností.

Předpokládejme, že délka obou posloupností je N , což je současně perioda posloupnosti $x_2(n)$. Potom můžeme konvoluční vztah definovat jako

$$\begin{aligned} x(n) &= x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \cdot x_2(n-m) = \\ &= \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m) + \sum_{m=n+1}^{N-1} x_1(m) \cdot x_2(N+n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \cdot x_2[(n-m)_{\text{mod } N}]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Takový způsob výpočtu nazýváme **kruhová konvoluce** a jeho výpočetní schéma je 55utokněno na obr.3.12.

3.4.3 Diskrétní korelace

Opět připomeňme vztahy pro výpočet korelace dvou spojitých funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ uvedených v kap.2.4.3 (nebudeme se zde rozptylovat ani případem kovarianční, ani autokorelační funkce, protože už víme, jak všechny tyto funkce navzájem souvisí). Obecně pro korelační funkci platí

$$R_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = E[x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)] \quad (3.20)$$

a za předpokladu stacionarity a ergodicity pro funkce s definičním oborem $t \in (-\infty, \infty)$ platí podle vztahu (2.46)

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

a abychom se vyhnuli limitním komplikacím i v podstatě nulovým hodnotám takto určené korelační funkce, využívá se pouze integrální část vztahu, tj. (podle (2.50))

$$R'_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt.$$

V případě znalosti funkcí $x_1(t)$ a $x_2(t)$ pouze na konečném intervalu T se limitní podmínky zbavujeme přirozenou cestou a je podle (2.52)

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \ x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_{14} \ x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20} \ x_{21} \ x_{22} \ x_{23} \ x_{24} \ x_{25}}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ x_2(-m) \end{array} \quad \Sigma \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23} & x_{22} & x_{21} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ x_2(2-m) \end{array} \quad \Sigma \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \hline x_{22} & x_{21} & x_{20} & x_{25} & x_{24} & x_{23} \\ \hline \end{array}$$

Obr.3.12 Výpočetní schéma kruhové konvoluce

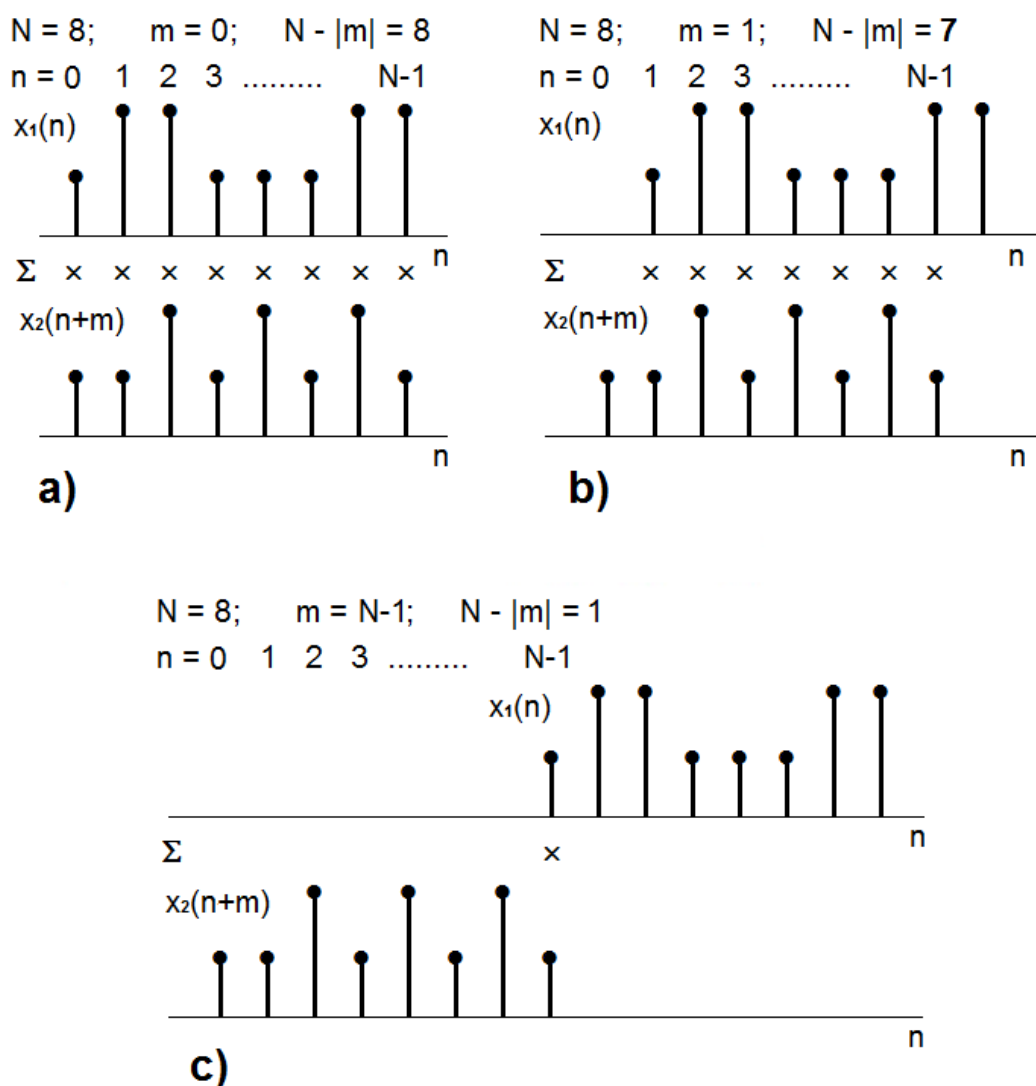
$$\hat{R}_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t) x_2(t + \tau) dt.$$

Určitě pro všechny ze zde připomenutých definicí korelační funkce lze vytvořit jejich diskrétní ekvivalent, protože ale práce s diskrétními posloupnostmi je zpravidla vyvolána potřebou řešit praktické úlohy a ty disponují konečnými posloupnostmi, pak zřejmě nejužitečnější z uvedených vztahů bude odhad korelační funkce pro konečnou posloupnost odvozený z (2.52), tj.

$$\hat{R}_{x_1 x_2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(nT_{vz}) x_2(nT_{vz} + mT_{vz}). \quad (3.21)$$

Ekvivalentně tomu bychom mohli vytvořit vztahy pro odhad diskrétní kovarianční funkce, resp. autokorelační funkce. Odhad diskrétních korelačních funkcí je ale zatížen jinými těžkostmi, proto se teď raději zabýváme jimi, než planým uváděním dalších variant korelační funkce, které jsou jen opakováním téhož definičního principu.

Abychom si co nejnázorněji demonstrovali problém, předpokládejme dvě posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ téže délky N vzorků (obr.3.13).



Obr.3.13 Schéma výpočtu odhadu diskrétní korelační funkce dvou posloupností téže konečné délky

Obr.3.13a zobrazuje situaci pro výchozí polohy obou funkcí, tj. pro $m = 0$. V tomto případě je možné spočítat všech N dílčích součinů, které se posléze sečtou a podělí N tak, jak náleží určení střední hodnoty. Pro $m = 1$ (obr.3.13b) dojde k posunu posloupnosti $x_2(n)$ o jeden vzorek vůči $x_1(n)$ a za této situace už nelze určit všech N dílčích součinů, pouze $N - |m|$ (pro první vzorek posloupnosti $x_1(n)$ a poslední vzorek posloupnosti $x_2(n)$ už neexistuje korespondující vzorek v druhé posloupnosti) a tudíž dělení výsledku hodnotou N pro určení střední hodnoty už není zcela adekvátní. Mezní situace nastává pro posun o $m = N - 1$ vzorků (obr.3.13c), kdy existuje už jen jediná dvojice dílčích činitelů. Pro větší posun, tj. $m \geq N$ již prvky obou posloupností mezi sebou vynásobit nelze – korelační funkce není definovaná. Co z tohoto rozboru vyplývá pro odhad korelační funkce? Za daných okolností součet ve vztahu (3.21) neprobíhá přes N sčítanců, nýbrž pouze pro $N - |m|$ sčítanců. To by znamenalo, že první modifikace vztahu (3.21) směřuje ke změně sumačních mezí na (tzv. **odhad korelační funkce s konstantní vahou**)

$${}^1\bar{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1, \quad (3.22)$$

kdy se každá hodnota korelační sumy považuje za hodnotu autokorelační funkce se stejnou vahou, která se rovná převrácené hodnotě celkového počtu vzorků vstupních posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$, N je délka posloupnosti. Střední hodnota tohoto odhadu je (bez důkazu)

$$E[{}^1\hat{R}_{x_1x_2}] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = \frac{N-|m|}{N} R_{x_1x_2}(m), \quad (3.23)$$

kde $R_{x_1x_2}(m)$ je skutečná hodnota korelační funkce. To znamená, že střední hodnota odhadu se nerovná správné hodnotě, ale blíží se jí, když $N \rightarrow \infty$ a $|m| \ll N$. Platí tedy, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[{}^1\hat{R}_{x_1x_2}] = R_{x_1x_2}(m), \quad (3.24)$$

odhad je asymptoticky nevychýlený. Odhad rozptylu pro posloupnosti reálných čísel je přibližně

$$\text{var}[{}^1\hat{R}_{x_1x_2}] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{x_1x_2}(n)]^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m). \quad (3.25)$$

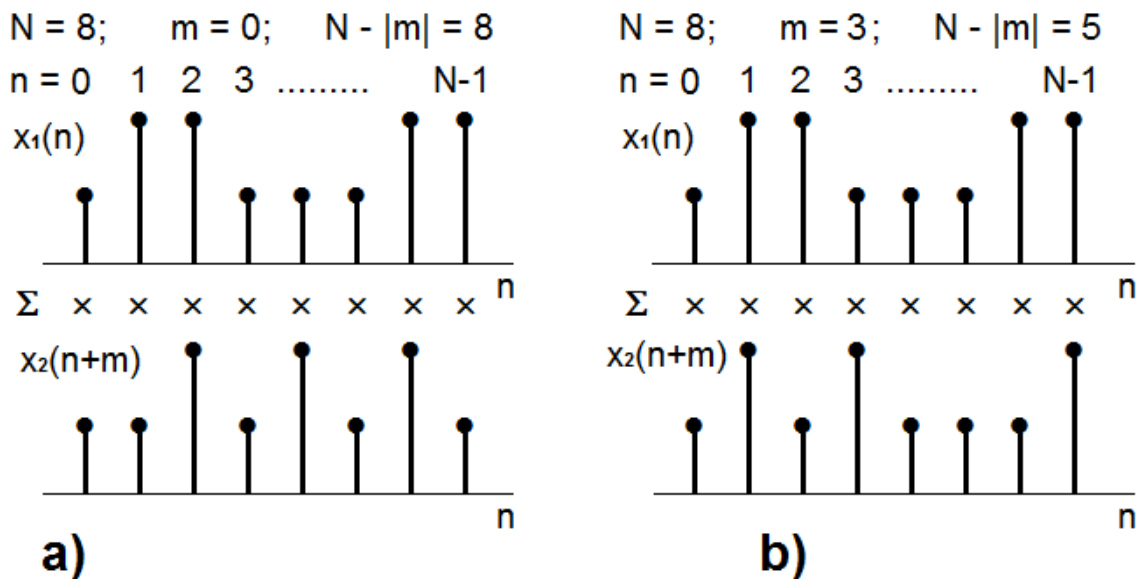
Protože odhad rozptylu konverguje pro $N \rightarrow \infty$ k nule, je odhad korelační funkce ${}^1\hat{R}_{x_1x_2}$ konzistentním odhadem $R_{x_1x_2}(m)$. Z praktického hlediska to všechno znamená, že se snižujícím se počtem součinů v korelační sumě se relativně zvyšuje váha, kterou je hodnota součtu násobena a tedy i v případě periodických posloupností není průběh jejich korelační funkce periodický, nýbrž se její kmity tlumí.

Popsanému způsobu výpočtu by zřejmě lépe slušel výpočet střední hodnoty podle vztahu

$${}^2\bar{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1. \quad (3.26)$$

Střední hodnota tohoto odhadu je rovna

$$E[{}^2\hat{R}_{x_1x_2}(m)] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = R_{x_1x_2}(m), \quad (3.27)$$

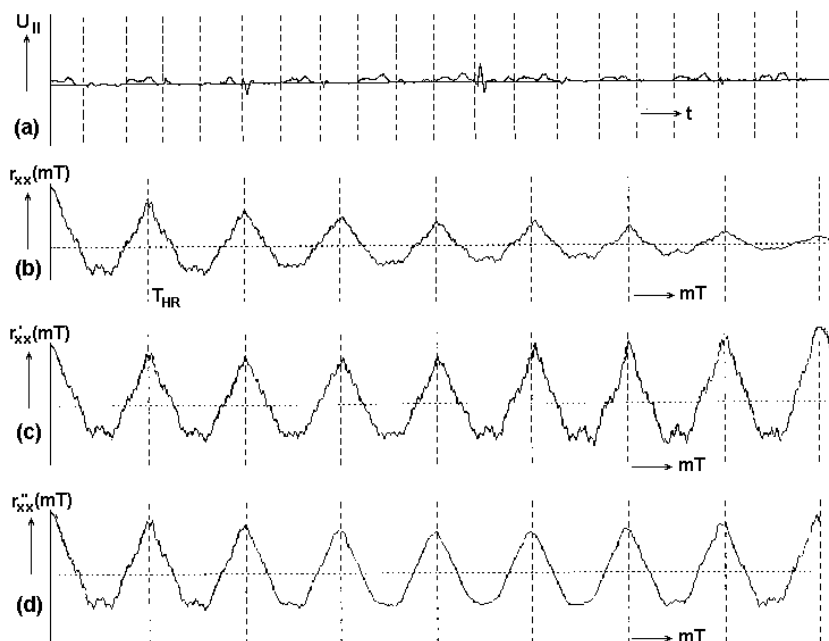


Obr.3.14 Princip výpočtu kruhové konvoluce

což znamená, že je rovna, pro libovolné N a m , skutečné hodnotě korelační funkce. Rozptyl tohoto odhadu

$$\text{var}[\hat{R}_{x_1x_2}] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{x_1x_2}(n)^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m)] \quad (3.28)$$

je však poněkud větší než v případě prvního odhadu. Sumační členy v obou výrazech pro rozptyl jsou stejné, výrazy se liší pouze váhovým koeficientem, který je v případě $m=0$ týž, s růstem hodnoty posunutí m se váhový koeficient ve vztahu (3.28) oproti vztahu (3.25) zvětšuje. To samozřejmě odpovídá elementární úvaze založené na myšlence, že s menším počtem



Obr.3.15 Odhad autokorelační funkce pravidelného sinusového signálu EKG s potlačenou komorovou složkou – (a) analyzovaný signál; (b) autokorelační funkce podle (3.22); (c) autokorelační funkce podle (3.26); (d) kruhová autokorelační funkce podle vztahu (3.29). [V grafech 58 autokorelacích funkcí jsou vyznačeny násobky srdeční periody.]

sčítanců v korelačním součtu se zvětšuje rozptyl a tím klesá spolehlivost odhadu.

Stejně jako v případě konvoluce, lze za předpokladu periodičnosti obou korelovaných funkcí s periodou N vzorků použít výpočtu pomocí kruhové korelace podle vztahu (obr.3.14)

$${}^3\hat{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \left[\sum_{n=1}^{N-|m|} x_1(n)x_2(n+m) + \sum_{n=N-|m|+1}^N x_1(n)x_2(n+m+(N-1)) \right], \quad (3.29)$$

$$m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Tento vztah zachovává konstantní počet vzorků zahrnutých do výpočtu tím, že scházející vzorky na jedné straně posloupnosti doplňuje vzorky z její druhé strany. Střední hodnota odhadu ${}^3\hat{R}_{x_1x_2}(m)$ je rovna $R_{x_1x_2}(m)$, stejně jako u ${}^2\hat{R}_{x_1x_2}(m)$, jeho rozptyl je naopak týž jako v případě odhadu ${}^1\hat{R}_{x_1x_2}(m)$. Na druhé straně cyklické doplňování scházejících vzorků může znamenat, pokud zpracovávané posloupnosti nebudou primárně periodické, vnucení umělé periodicity analyzovaným posloupnostem s periodou rovnou délce zpracovávané posloupnosti a také zachování konstantní pracnosti při výpočtu každého vzorku korelační funkce, zatímco u prvních dvou vzorců dochází s růstem vzájemného posunutí signálů k lineárnímu snižování pracnosti výpočtu.

3.4.4 Rozklad diskretních periodických posloupností na dílčí harmonické složky

Rozklad spojitých funkcí na harmonické složky jsme začali rozkladem periodických funkcí pomocí Fourierovy řady. Připomeňme dva základní vztahy (2.67) a (2.68), podle kterých Fourierovu řadu v exponenciálním tvaru pro spojitě periodické funkce píšeme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{c}_n e^{jn\Omega t},$$

kde \dot{c}_n jsou komplexní **Fourierovy koeficienty** definované vztahem

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

a $\Omega = 2\pi/T$ je opět úhlový kmitočet základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$. Modul komplexního Fourierova koeficientu \dot{c}_n určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

Fourierova řada pro spojitě funkce je definovaná nekonečnou řadou. To vyplývá ze skutečnosti, že komplexní exponenciála se spojitým časem $e^{j\omega t}$ jako jádrová funkce rozkladu nabývá různých hodnot pro různé hodnoty úhlového kmitočtu ω . Situace je ale zcela odlišná u diskretní posloupnosti $e^{j\Omega n T_{vz}}$, jejíž hodnoty se opakují s periodou kmitočtu 2π (jak je uvedeno ve vztahu (3.8). Chceme-li tedy najít diskretní ekvivalent Fourierovy řady pro spojitě funkce, pak musíme vzít v potaz tuto známou skutečnost a počet frekvenčních složek ve spektru diskretní posloupnosti již nebude nekonečný, nýbrž omezený vzorkovací frekvencí, protože je $\Omega = 2\pi/NT_{vz}$, na N vzorků.

Protože je diskretní Fourierova řada reprezentována konečným součtem dílčích složek, nejsou problémy, na rozdíl od případu se spojitým časem, s její konvergencí.

Nechť tedy $x(kT_{vz})$ je periodická posloupnost s periodou NT_{vz} . Tu lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady pomocí vztahu

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{c}_n \cdot \exp \frac{j2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.30)$$

kde

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}) \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.31)$$

Důkaz:

Změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu \dot{c}_n

$$\dot{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \exp\left(-\frac{2j\pi mn}{N}\right). \quad (3.32)$$

Pak je

$$\begin{aligned} s(kT_{vz}) &= \sum_{n=0}^{N-1} \dot{c}_n \cdot \exp(2j\pi nk / N) = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \exp(-2j\pi mn / N) \right) \exp(2j\pi nk / N) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m) / N], \end{aligned} \quad (3.33)$$

Potom pro $k = m$ je

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m) / N] = \sum_{n=0}^{N-1} e^0 = N; \quad (3.34)$$

pro $k \neq m$ pomocí vztahu pro součet geometrické posloupnosti

$$\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m) / N] = \frac{1 - \exp[2j\pi N(k-m) / N]}{1 - \exp[2j\pi(k-m) / N]} = 0 \quad (3.35)$$

a tedy (protože součet je nenulový pouze pro $k = m$)

$$\begin{aligned} x(kT_{vz}) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m) / N] = \\ &= \frac{1}{N} x(kT_{vz}) \cdot N = x(kT_{vz}). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Tedy $x(kT_{vz}) = s(kT_{vz})$, což bylo to, co jsme chtěli dokázat. □□□

Příklad:

Určete spektrum posloupnosti $x(kT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi k/N)$.

Řešení:

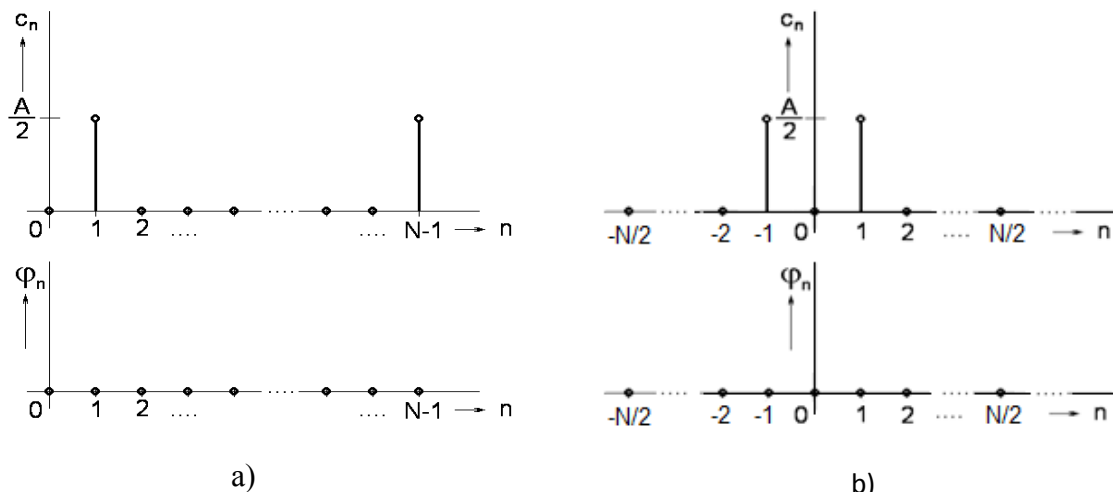
Nejdříve spočítejme úlohu jen na základě logické úvahy Zadaná posloupnost $x(kT_{vz})$ je periodická s periodou N a můžeme si ji vyjádřit pomocí Eulerovy vztahu ve tvaru

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \cdot \left[\exp \frac{2j\pi k}{N} + \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) \right].$$

Nyní protože

$$\exp \frac{2j\pi k(N-1)}{N} = \exp \frac{2j\pi kN}{N} \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) = \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right)$$

je



Obr.3.16 Amplitudové a fázové spektrum posloupnosti $x(kT_v) = A \cdot \cos(2\pi k/N) - a)$ s periodou $\langle 0, N-1 \rangle$; $b)$ s periodou $\langle -N/2, N/2 \rangle$

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \left[\exp \frac{j2\pi k}{N} + \exp \left(\frac{j2\pi(N-1)k}{N} \right) \right]$$

Z toho plyne, že

$$\dot{c}_1 = \frac{A}{2}, \quad \dot{c}_{N-1} = \frac{A}{2} \text{ a } \dot{c}_n = 0 \text{ pro všechna jiná } n.$$

Spektrum tohoto signálu pak můžeme graficky vyjádřit s periodou $\langle 0, N-1 \rangle$ a díky periodičnosti jádrové funkce řady i v periodě $\langle -N/2, N/2 \rangle$, jak je tomu na obr.3.16.

Pokusme se nyní spočítat koeficienty diskretní Fourierovy řady pro danou posloupnost podle definičního vztahu. Nejdříve stejnosměrnou složku, tj. pro $n = 0$. Podle (3.31) je

$$\dot{c}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \cdot \exp \left(- \frac{j2\pi k \cdot 0}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right).$$

Protože součet vzorků kosinové posloupnosti přes jednu celou periodu je nulový, je hodnota \dot{c}_0 rovněž nulová (pro stejnosměrnou složku určitě dle očekávání).

Nyní určíme hodnotu Fourierova koeficientu pro $n = 1$.

$$\begin{aligned} \dot{c}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \cdot \exp \left(- \frac{j2\pi k}{N} \right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \left(\cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) - j \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) - \frac{j}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A \cdot \cos \left(\frac{2\pi k}{N} \right) \sin \left(\frac{2\pi k}{N} \right) = \\ &= \frac{A}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\cos(0) + \cos \left(\frac{4\pi k}{N} \right) \right] - \frac{jA}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sin(0) + \sin \left(\frac{4\pi k}{N} \right) \right] = \\ &= \frac{A}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(0) + \frac{A}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos \left(\frac{4\pi k}{N} \right) - \frac{jA}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(0) - \frac{jA}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin \left(\frac{4\pi k}{N} \right). \end{aligned}$$

Součet v prvním členu je N , druhý součet, stejně jako třetí i čtvrtý jsou nulové (druhý a čtvrtý, protože se týká součtu vzorků kosinusovky, resp. sinusovky přes dvě celé periody – sice přes N vzorků, ale obě harmonické funkce mají dvojnásobnou frekvenci než je zadaná, třetí součet je snad hanba vysvětlovat). Takže výsledná hodnota je

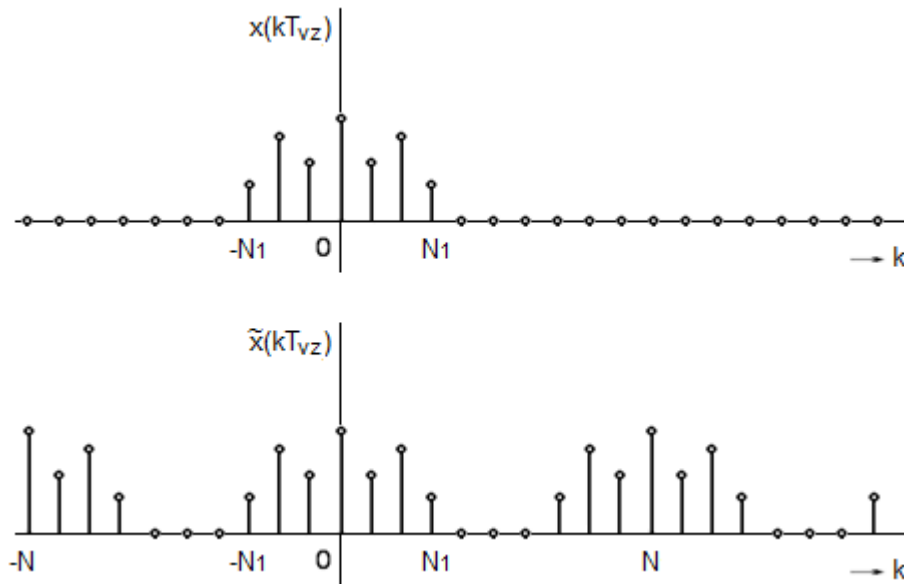
$$\dot{c}_1 = \frac{A}{2}$$

tak jak v úvodní fázi řešení. Výpočet pro $n = -1, N-1$ a pro všechny ostatní n je už ekvivalentní. $\square\square\square$

3.4.5 Fourierova transformace s diskretním časem (DTFT)

Pokusme se zde uplatnit podobnou strategii jako v případě přechodu od Fourierovy řady k Fourierově transformaci v případě funkcí spojitých v čase

Nechť $x(kT_{vz})$ je časově omezený posloupnost s diskretním časem s $x(kT_{vz}) = 0$ pro všechna celá $k < -N_1$ a $k > N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta. Dále, necht' pro jakékoliv kladné celé sudé číslo $N > 2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ posloupnost s periodou NT_{vz} , která je $x(kT_{vz})$ pro $k = -N/2, -(N/2)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$ (obr.3.17)



Obr.3.17 Podmínky přechodu od diskretní Fourierovy řady k Fourierově transformaci

Z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ máme

$$x(kT) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}_N(kT_{vz}). \quad (3.37)$$

Protože $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ je periodická funkce s periodou NT_{vz} , má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp \frac{2j\pi nk}{N}, \quad (3.38)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT_{vz}) \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi kn}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.39)$$

Z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi knT_{vz}}{N} \right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.40)$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(-jk\omega T_{vz}), \quad \omega = 2\pi n / NT_{vz}, \quad (3.41)$$

kde ω je pro $N \rightarrow \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

Uvedené odvození jen potvrzuje, co už známe z rozkladu spojitých funkcí, totiž že spojitost či nespojitost spektra nesouvisí se spojitostí či nespojitostí rozkládané funkce, nýbrž s její periodičností.

3.4.6 Diskrétní Fourierova transformace (DFT)

Aby bylo možné s frekvenčním spektrem prakticky počítat, je užitečné spektrální funkci diskretizovat.

Předpokládejme, že posloupnost $x(nT_{vz}) = 0$ pro $n < 0$ a $n \geq N$, pak DFT je definována vztahem

$$\begin{aligned} \mathcal{DFT}\{x(nT_{vz})\} &= X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega n T_{vz}} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{NT_{vz}} n T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi kn / N} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Zpětnou inverzní diskrétní Fourierovu transformaci pak definuje vztah

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{X(k\Omega)\} = x(nT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jnT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{j2\pi kn / N}. \quad (3.43)$$

Pokud uvažujeme pouze posloupnost hodnot bez její časové resp. kmitočtové interpretace, lze definiční vztah diskrétní Fourierovy transformace vyjádřit též ve tvaru

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn / N}. \quad (3.44)$$

resp. inverzní transformace

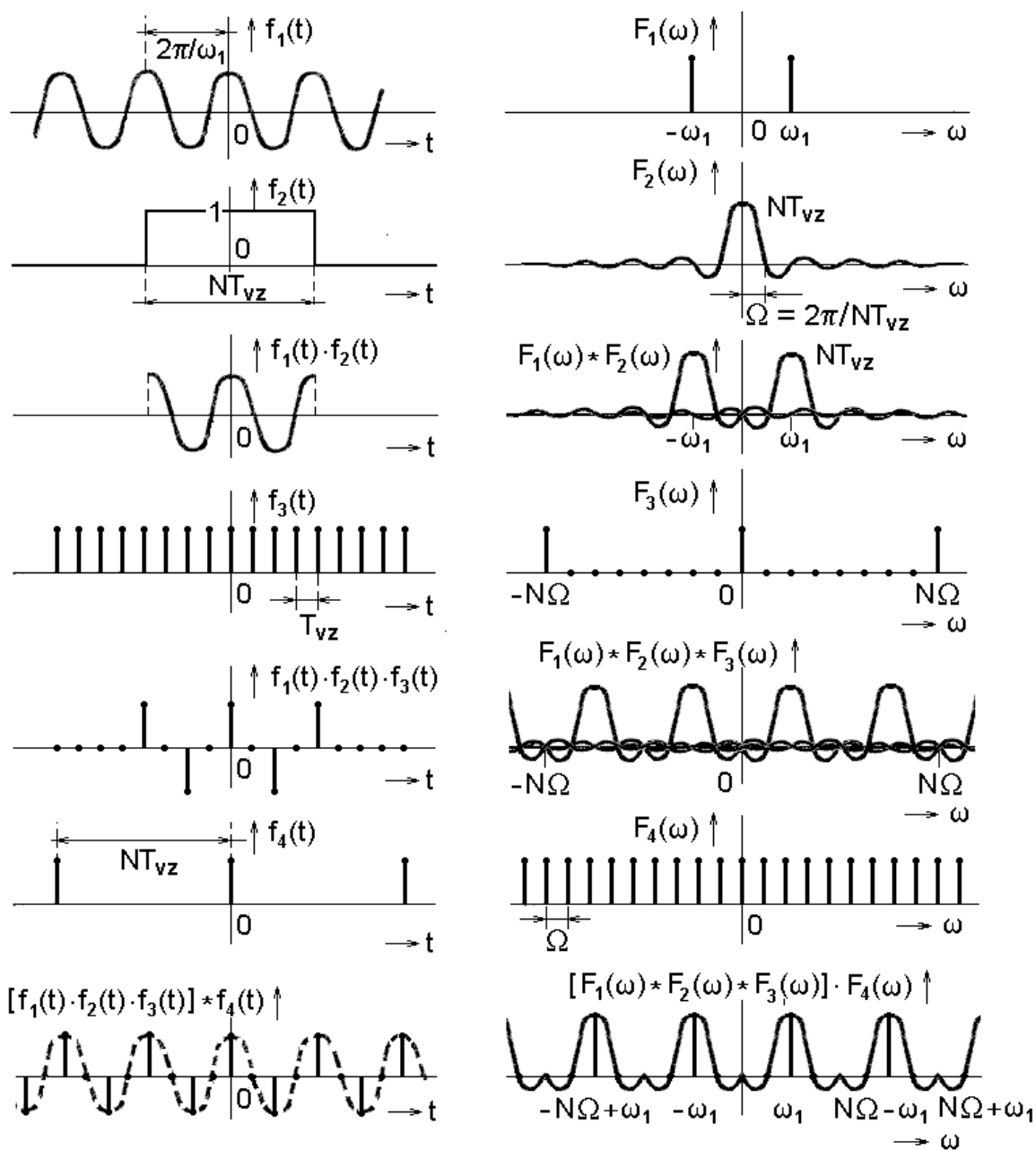
$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn / N}. \quad (3.45)$$

Platí, že

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x. \quad (3.46)$$

Tuto vlastnost diskrétní Fourierovy transformace nazýváme **inverzibilita**. Můžeme ji dokázat následujícím postupem:

$$\begin{aligned} x(mT_{vz}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jmT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega n T_{vz}} \right) \cdot e^{jmT_{vz}k\Omega} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{pro } m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = N \\ \text{pro } m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - e^{j(m-n)N\Omega T_{vz}}}{1 - e^{j(m-n)\Omega T_{vz}}} = 0 \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{N} x(mT_{vz}) \cdot N = x(mT_{vz}); \quad \Omega = 2\pi / NT_{vz}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

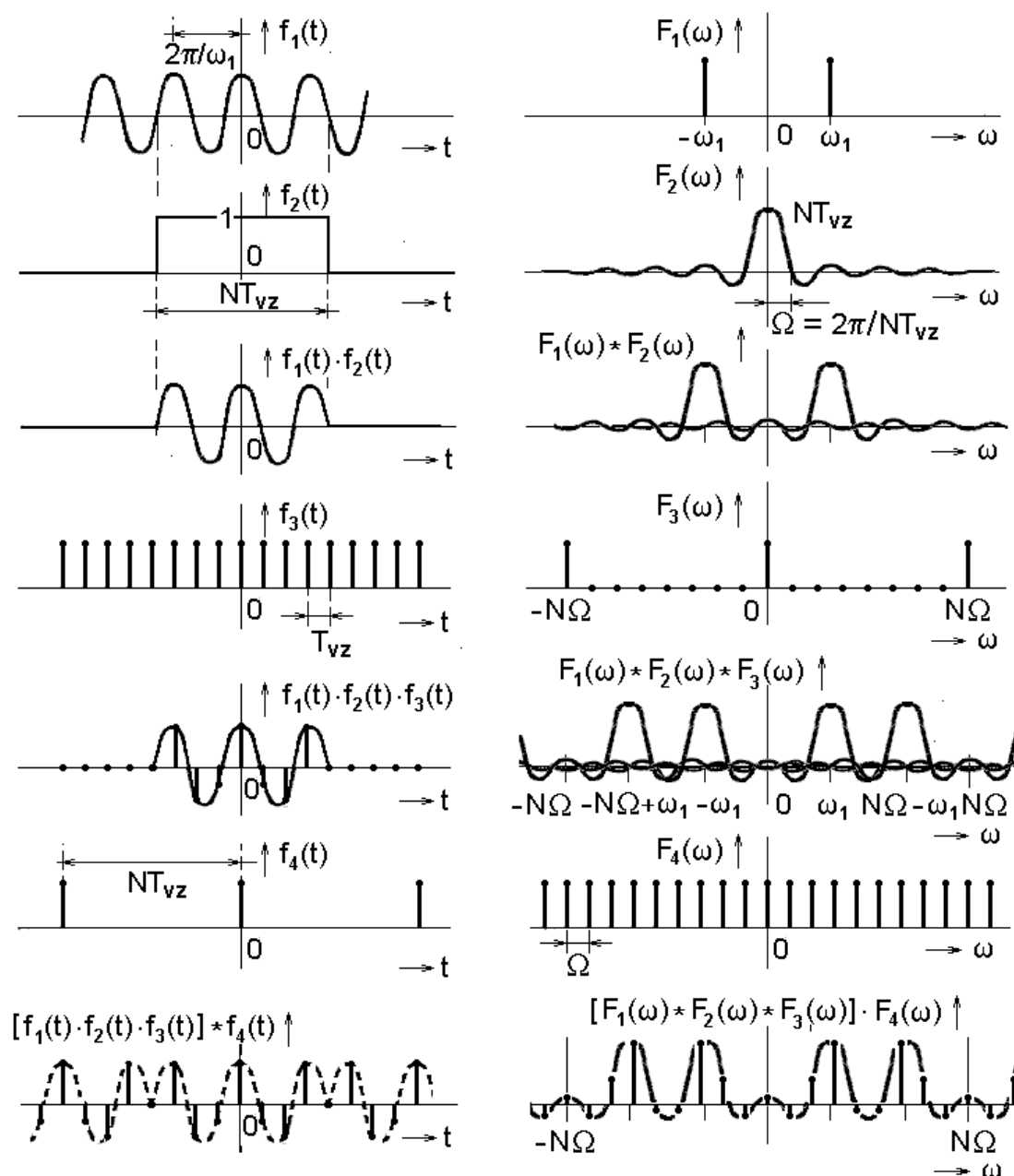


Obr.3.18 Princip a důsledky diskrétní Fourierovy transformace pro kmitočet signálu
 $\omega_1 = \omega_{vz}/4 = \pi/(2T_{vz})$ (s pomocí [4])

Vliv DFT na charakter spektra harmonické posloupnosti je patrný z obr.3.18 a 3.9 Na obr.3.18 je zobrazen případ, kdy je perioda vzorkované funkce $T = 2\pi/\omega_1$ rovna celočíselnému násobku vzorkovací periody $T_{vz} = 2\pi/\omega_{vz}$, v konkrétním případě $T = 4T_{vz}$, tj. $\omega_1 = \omega_{vz}/4 = \pi/(2T_{vz})$. Na obou obrázcích jsou zobrazeny v levé části časové průběhy a vpravo jim odpovídající spektra. Konečný úsek signálu je vytvořen z původního časově neomezeného průběhu vynásobením obdélníkovým oknem, jehož délka je rovna celočíselnému násobku vzorkovací periody, konkrétně $N = 8$. Spektrum vynásobeného, tj. časově omezeného úseku spojitě harmonické funkce je dán konvolucí spekter původního harmonického signálu a spektra obdélníkového okna ve tvaru funkce $\text{Sa}(\omega)$. Vzorkování tohoto úseku funkce o konečné době trvání vyjádříme dle definice (vztah (2.52)) násobením sledem jednotkových impulsů

s periodou opakování rovnou vzorkovací periodě T_{vz} . Tomu odpovídá rovněž periodické impulsní spektrum s periodou rovnou vzorkovací frekvenci $\omega_{vz} = N\Omega$ a výsledné spektrum navzorkované posloupnosti je konvolucí všech tří dílčích složek, jejichž násobením vznikl diskretní harmonický signál omezeného trvání.

Diskretní verzi spektra získáme násobením spektra pulsem Diracových s frekvencí Ω . Tomuto pulsu odpovídá v časové oblasti periodický sled jednotkových impulsů s periodou NT_{vz} . Protože konečné spektrum je výsledkem násobení spojitého spektra navzorkované posloupnosti konečného trvání, je časová reprezentace navzorkovaného spektra konvoluce navzorkované posloupnosti s časovou reprezentací vzorkovacího pulsu spektra. Touto konvolucí se posloupnosti nepřímo vnucuje periodicitu, takže výsledné diskretní spektrum je spektrem periodické posloupnosti. Tím, že je vzorkování signálu vhodně vázáno s délkou konečného obdélníkového okna a tím i se vzorkováním spektra, odpovídá fiktivní výsledná periodická po-



Obr.3.19 Princip a důsledky diskretní Fourierovy transformace pro kmitočet signálu $\omega_1 = 5 \omega_{vz}/16 = 5\pi/(8T_{vz})$ (s pomocí [4])

sloupnost původní funkci, jejíž spektrum jsme pomocí DFT počítali.

Na druhé straně, pokud délka omezujícího obdélníkového okna neodpovídá celočíselnému násobku period vstupního signálu, pak i výsledné diskretní spektrum odpovídá funkci, jejíž průběh je modifikován, např. tak, jak je zobrazeno na obr.3.19.

3.4.7 Rychlá Fourierova transformace (FFT)

Definiční vztah pro výpočet diskretní Fourierovy transformace v exponenciálním tvaru můžeme pomocí Eulerova vztahu vyjádřit i funkcemi cos a sin jako

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot (\cos(k\Omega nT_{vz}) - j\sin(k\Omega nT_{vz})). \quad (3.48)$$

Výpočet každé z N složek spektra posloupnosti pak představuje N-násobný součet součinu hodnoty signálu s reálnou i komplexní složkou jádra transformace, představované odpovídajícími hodnotami funkcí sin a cos. Takto definovaný výpočet je poměrně pracný a je otázkou, zda jej nelze optimalizovat.

Zrychlení výpočetního algoritmu se může dosáhnout využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou. Relativně zdoluhavé a opakované výpočty hodnot obou goniometrických funkcí lze usnadnit používáním předem spočítaných tabulkových hodnot pro jednu čtvrtinu periody jedné z obou funkcí. Dalšího zefektivnění výpočtu lze dosáhnout vhodným uspořádáním výpočetního algoritmu, např. tzv. rychlou Fourierovou transformací.

Abychom dokázali posoudit pracnost jednotlivých variant výpočtu diskretního spektra diskretního signálu je potřeba určit základní elementy výpočtu. Z definičního vztahu (3.48) vyplývá, že takové elementy jsou dva - násobení komplexního čísla a sečtení dvou čísel. Jednotku pracnosti P tedy definujeme pomocí jednoho komplexního násobení a sečtení dvou čísel. Výpočet jedné hodnoty spektra signálu o N vzorcích pomocí definičního vztahu představuje N elementů pracnosti výpočtu, tedy $N \cdot P$. Pracnost výpočtu celého spektra zahrnujícího N hodnot poté představuje hodnotu $N \cdot N \cdot P = N^2 \cdot P$. Tuto hodnotu můžeme považovat za referenční pro srovnání s pracnostmi jiných variant výpočtu.

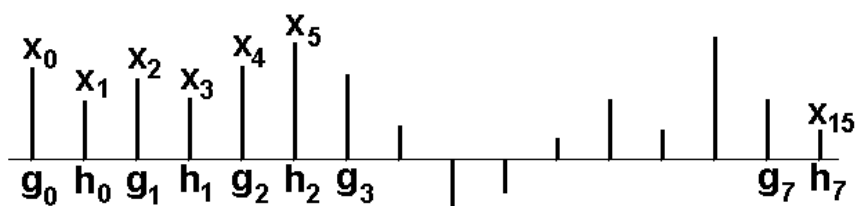
Algoritmus rychlé Fourierovy transformace má dvě z hlediska pracnosti v podstatě ekvivalentní varianty:

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti,

z nichž se podrobněji zabýváme principem první varianty, který je pak snadno aplikovatelný i pro postup druhý.

Předpokládáme, že vstupní signálová posloupnost má sudý počet vzorků. Rozdělíme ji na dvě dílčí posloupnosti (obr.3.20):

- $\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti;
- $\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti, $i = 0, 1, \dots, N/2-1$.



Obr.3.20 Rozdělení signálové posloupnosti

Dále předpokládáme, že všechny posloupnosti (původní i obě dílčí), mají svou DFT, které jsou definovány vztahy

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}} \quad (3.49)$$

a

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}} \quad (3.50)$$

pro $k \in \langle 0, N/2-1 \rangle$.

k-tou hodnotu spektra počítanou podle původního transformačního algoritmu nyní vyjádříme pomocí dílčích výpočtů $G(k)$ a $H(k)$. V tom případě platí

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0 \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}0k} + x_1 \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}1k} + x_2 \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}2k} + \dots + x_{N-1} \cdot e^{-\frac{j2\pi}{N}(N-1)k} = \\ &= \begin{vmatrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & h_7 = x_{15} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi (2i+1)k}{N}} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} \cdot e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod(N/2) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Když hodnoty pomocných dílčích posloupností budeme počítat podle základního definičního vztahu, bude celková pracnost součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností a jejich spojení

$$2 \cdot (N/2)^2 \cdot P + N \cdot P = (N^2 \cdot P)/2 + N \cdot P \quad (3.52)$$

tzn. dosáhneme uspořádkání pracností téměř na polovinu, pokud bude druhý člen vyjadřující pracnost zkombinování obou posloupností malý ve srovnání se členem prvním (to bude platit především pro velké hodnoty N).

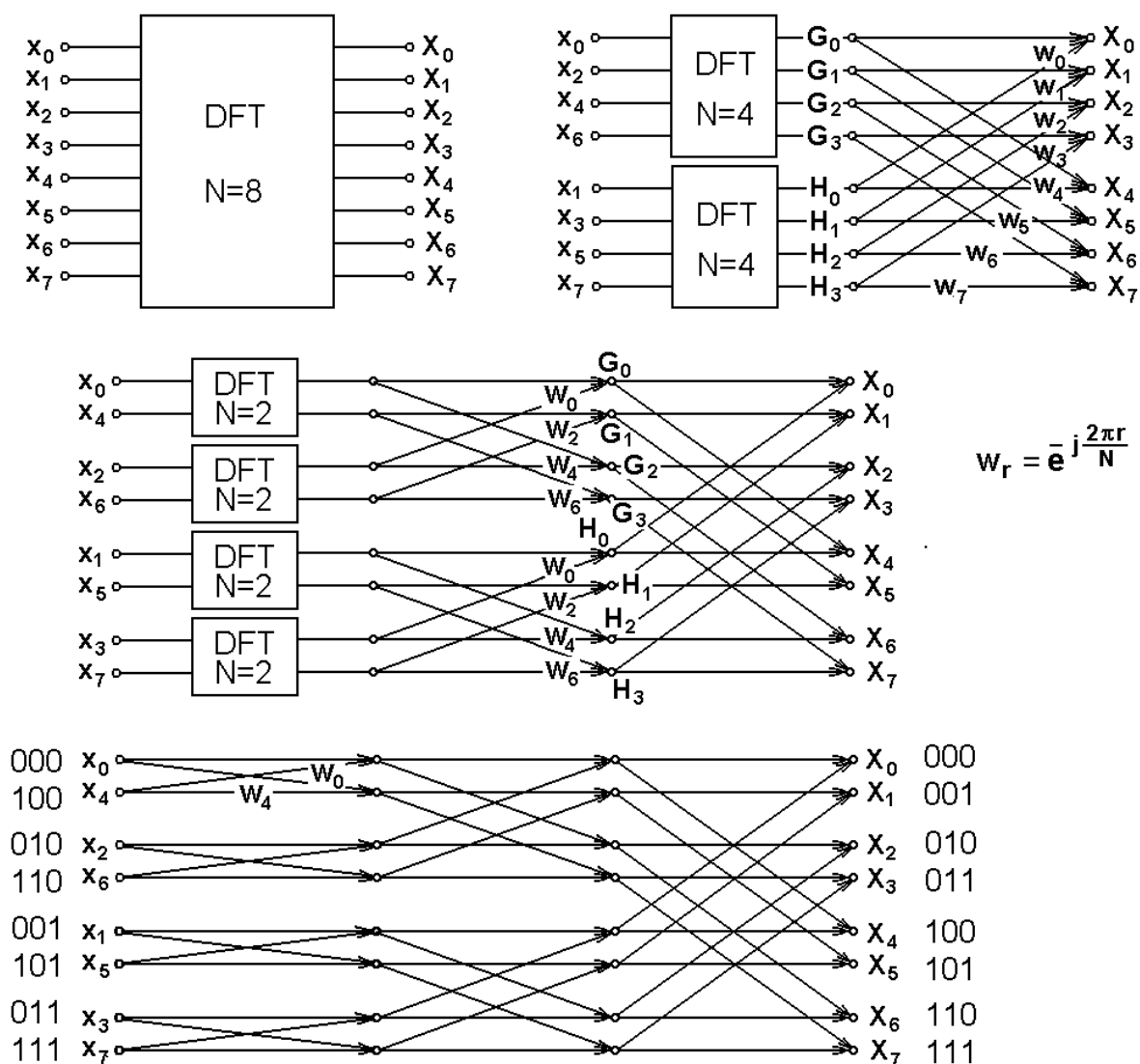
Je-li $N/2$ opět sudé, může se v dělení dále pokračovat – celkově je výhodné, je-li N mocninou dvou, tj. platí $N = 2^m$ - v tom případě lze pokračovat v dělení až ke vstupní posloupnosti (obr.3.21).

Každý uzel ve výpočetním schématu představuje součet příspěvků reprezentovaných vstupními orientovanými hranami, přičemž jeden z obou vstupů je násoben vahou w_r . Pracnost výpočtu v každém uzlu schématu bude právě P a počet uzlů v každé výpočetní vrstvě je N , pracnost výpočtu v celé vrstvě je $N \cdot P$. Počet vrstev ve výpočetním schématu bude v případě $N = 2^m$ roven $m = \log_2 N$ a proto celková pracnost je $N \cdot P \cdot m = N \cdot P \cdot \log_2 N$. Po velká N tento výraz roste již téměř lineárně a jeho hodnoty jsou proto výrazně menší než původní pracnost s kvadratickou závislostí.

Vzhledem k postupnému dělení a uspořádávání dílčích vstupních posloupností není po dokončení rozkladu vstupní signálová posloupnost uspořádána vzestupně podle jejích indexů, nýbrž jinak. Vyjádříme-li hodnoty indexů jednotlivých vzorků binárně a tato binární čísla čteme zprava doleva tvoří hodnoty indexů přirozeně rostoucí posloupnost - proto nazýváme uspořádání vzorků vstupní posloupnosti **bitově inverzní**.

Další skutečností usnadňující výpočet je existence standardních opakujících se motýlkovitých výpočetních struktur o čtyřech uzlech a čtyřech hranách, což znamená, že výpočet v rámci každé takové dílčí struktury se řídí stále stejným algoritmem. Navíc pro výpočet vý-

stupních hodnot v každé vrstvě jsou potřeba pouze vstupní vzorky každé vrstvy, výpočet tedy může probíhat vždy jen v jedné vrstvě a lze tak šetřit výpočetní paměť.



Obr.3.21 Výpočetní schéma algoritmu FFT rozkladem v časové oblasti

4 Matematický popis systémů pracujících ve spojitém čase

4.1 Pár úvodních myšlenek, aneb co bychom ve čtvrté kapitole chtěli

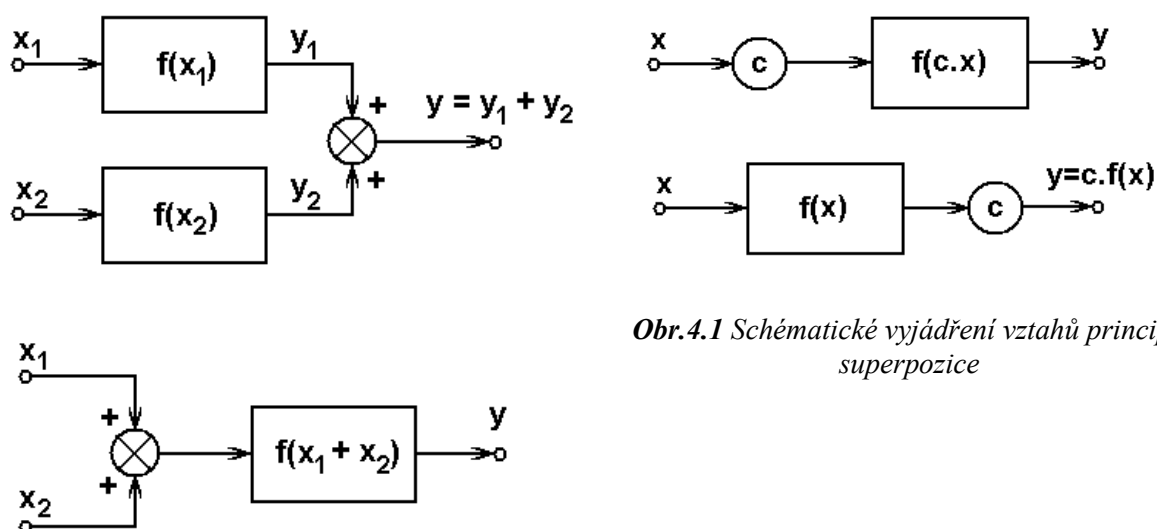
Čtenář tohoto textu by se v této kapitole měl seznámit se způsoby popisu zejména lineárních soustav. Ty mohou sloužit k úpravě frekvenčních vlastností zpracovávaných funkcí či posloupností (časových řad), mohou být použity k rozkladu časové řady na jednotlivé komponenty, mohou sloužit i k modelování průběhů analyzovaných veličin. Po přečtení této kapitoly by měl čtenář nejen vědět, jaké možnosti existují, i jak jednotlivé způsoby popisu spolu souvisí. Měl by dokázat pro danou strukturu jednotlivé formy popisu vytvořit, měl by dokázat jednotlivé způsoby popisu interpretovat, jinými slovy, vědět co nám o daném reálném objektu říkají. Je to opět ambiciózní cíl.

4.2 Linearita

Lineární systém s převodní funkcí $y = f(x)$ je takový, pro nějž platí princip superpozice, definovaný následujícími dvěma vztahy (obr.4.1):

1. $f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$;
 2. $c \cdot f(x) = f(c \cdot x)$,
- (4.1)

kde c je konstanta.



Obr.4.1 Schématické vyjádření vztahů principu superpozice

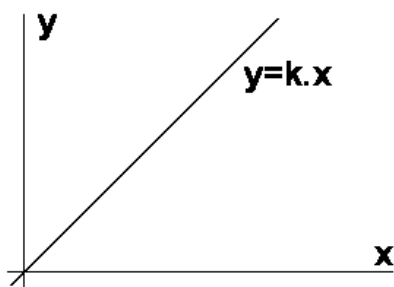
Někdy se lze setkat i s obecným vyjádřením principu superpozice ve tvaru

$$\sum_{i=1}^n c_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^n c_i x_i\right), \quad (4.2)$$

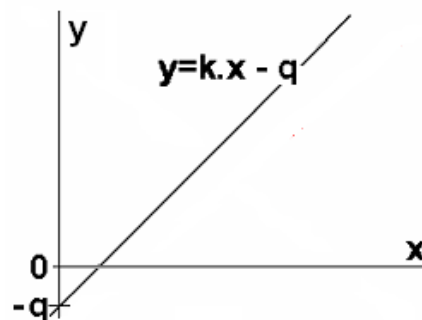
kde c_i jsou konstanty. Princip superpozice můžeme obecně vyložit i tak, že je-li nějaký komplexní problém lineární, můžeme jeho řešení získat váhovaným součtem řešení jeho jednotlivých dílčích částí.

Příklad:

Ověřte linearitu systémů s převodními funkcemi podle obr.4.2.



a)



b)

Obr.4.2 Příklady převodních funkcí systémů – a) lineární funkce procházející počátkem; b) lineární funkce s absolutním členem.

Řešení:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y_{L1} &= k.x_1 + k.x_2 = k.(x_1+x_2) = y_{P1}; \\ y_{L2} &= k.(c.x) = c.k.x = y_{P2}, \end{aligned}$$

kde y_{L1} reprezentuje výpočet dle levé strany prvního definičního vztahu principu superpozice, y_{P1} dle jeho pravé strany, y_{L2} výpočet dle levé strany druhého vztahu a y_{P2} výpočet dle jeho pravé strany.

Systém s převodní funkcí podle obr.4.3a splňuje princip superpozice, je tedy lineární.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad y_{L1} &= k.x_1 - q + k.x_2 - q = k.(x_1+x_2) - 2q \neq k.(x_1+x_2) - q = y_{P1}; \\ y_{L2} &= k.(c.x) - q = ckx - q \neq c.(k.x - q) = ckx - cq = y_{P2}. \end{aligned}$$

Systém s převodní funkcí podle obr.4.3b nesplňuje princip superpozice, tedy lineární není, přestože jeho převodní funkce má lineární charakter. □□□

4.3 Vnější (vstupní/výstupní) popis

4.3.1 Slova úvodní

Hovoříme-li o vnějším popisu, zajímá nás jen a pouze, jak vzájemně souvisí veličina představující vstup daného systému s veličinou výstupní. Mezi oběma veličinami se nachází něco, co ze vstupu udělá výstup, co průběh vstupní veličiny přemění na výstupní. V této kapitole ale nebude důležité, jak to funguje uvnitř systému, nýbrž pouze jak se systém jeví navenek.

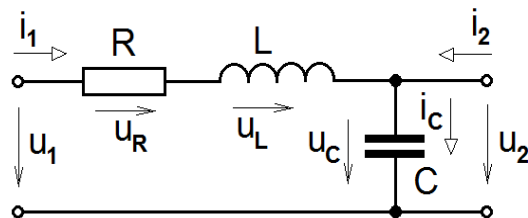
4.3.2 Diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je základním způsobem popisu jakékoliv soustavy – lineární, nelineární, autonomní, neautonomní, ... Je tedy zřejmě nejlepší tímto způsobem popisu začít.

Připomeňme elektrický model cévního segmentu z příkladu v kap.1.3.2, znovu zobrazený na obr.3.1. Z 2.Kirchhoffova zákona, uvádějícího, že součet napětí v obvodové smyčce je roven nule, je vstupní napětí obvodu rovno

$$u_1(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t). \quad (4.3)$$

A protože platí další vztahy pro napětí na elektrickém odporu (Ohmův vztah (1.3))



Obr.4.3 Pasivní sériový RLC obvod jako elektrický model cévního segmentu

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

a pro proud cívky (vztah (1.4))

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau,$$

z čehož plyne, že je též

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt} = L \cdot i'(t),$$

můžeme za předpokladu, že je obvod tzv. na prázdko nebo bez zátěže (jinými slovy z obvodu nic neproudí – $i_2 = 0$ a proto $i_1 = i_R = i_L = i_C = i_1$) přepsat rovnici (3.1) do tvaru

$$R \cdot i_1(t) + L \cdot i_1'(t) + u_C(t) = u_1(t). \quad (4.4)$$

Po záměně pořadí členů na levé straně a po dosazení za proud $i(t)$ a jeho derivaci ze vztahu mezi proudem a napětím na kondenzátoru (vztah (1.5)) je

$$LCu_C''(t) + RCu_C'(t) + u_C(t) = u_1(t) \quad (4.5)$$

a protože napětí na kondenzátoru je současně i napětím mezi výstupními svorkami, tj. $u_C(t) = u_2(t)$, lze psát matematický vztah mezi výstupním $u_2(t)$ a vstupním napětím $u_1(t)$ napětím obvodu

$$LCu_2''(t) + RCu_2'(t) + u_2(t) = u_1(t) \quad (4.6)$$

a nebo možná lépe ve tvaru

$$u_2''(t) + \frac{R}{L} u_2'(t) + \frac{1}{LC} u_2(t) = \frac{1}{LC} u_1(t). \quad (4.7)$$

Počet akumulčních prvků v systému určuje řád systému a tím i jeho modelu, zde diferenciální rovnice. V řešené úloze má obvod dva akumulční prvky (C, L), nejvyšší řád derivace výstupní proměnné je rovněž roven dvěma. Přesto, že jsme vyšli ze znalosti vnitřní struktury obvodu, odvozená diferenciální rovnice popisuje pouze vztah mezi výstupní a vstupní veličinou, bez vyjádření hodnot veličin popisujících chování jednotlivých prvků obvodu.

Obecně můžeme diferenciální rovnici popisující vlastnosti jakékoliv neautonomní lineární časově invariantní soustavy popsat ve tvaru

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + b_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + b_1y'(t) + b_0y(t) = \\ = a_mx^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + a_{m-2}x^{(m-2)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t), \end{aligned} \quad (4.8)$$

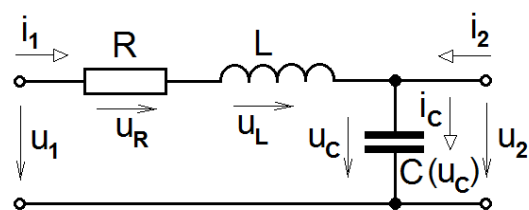
kde $y(t)$ značí výstupní veličinu, $x(t)$ vstupní veličinu a a_i , $i = 0, \dots, n$ a b_j , $j = 0, \dots, m$ jsou parametry systému a n a m jsou nezáporná celá čísla. Chceme-li získat průběh výstupní veličiny $y(t)$ ze znalosti průběhu vstupní veličiny $x(t)$ a daného systému, je třeba diferenciální rovnici popisující konkrétní systém vyřešit, obecně její n -násobnou integrací. Pokud je $m > n$, pak v řešení převažuje ideální derivační složka (ani n -násobná integrace neodstraní všech m derivací), jejímž důsledkem by měla např. být nekonečná impulzní odezva na vstupní jednotkový skok. Nekonečná hodnota je pouze teoretická možnost, reálné systémy díky různým setrvačnostem, zpožděním a jiným omezením nekonečné reakce nedosáhnou, proto reálné systémy se spojitým časem mohou být popsány diferenciální rovnicí, pro kterou musí platit $m \leq n$.

Je-li systém autonomní, tj. bez vstupu, je diferenciální rovnice homogenní, s nulovou pravou stranou.

Pokud parametry a_i a b_j nezávisí na veličinách popisujících chování systému, tj. buď jsou konstantní nebo maximálně závisí na čase, pak je **systém lineární**. Podle závislosti na čase rozlišujeme lineární systémy na **časově závislé** a **časově nezávislé (invariantní)**.

Nyní předpokládejme model cévního segmentu s reálnou modifikací, kdy je roztažnost cévní stěny závislá na tlaku krve v cévě. V náhradním elektrickém schématu to znamená jedinou změnu - předpokládáme kapacitu kondenzátoru závislou na napětí na kondenzátoru (obr.4.4). To znamená, že do systému zavedeme jednu nelinearitu.

Odvození diferenciální rovnice za této podmínky dospěje beze změny až k rovnici (4.4) a zde se vyskytne komplikace při určování proudu obvodem, protože vztah (1.5) pro okamžité napětí na kondenzátoru se mění na



Obr.4.4 Náhradní nelineární schéma

$$u_C(t) = \frac{1}{C(u_C(t))} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Z toho plyne

$$\int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = C(u_C) \cdot u_C \quad (4.10)$$

a potom pro i_C platí (pokud poněkud zjednodušíme zápis vynecháním časové závislosti, která ale nepřestává platit)

$$i_C = (C(u_C) \cdot u_C)'. \quad (4.11)$$

Protože do vztahu (4.4) potřebujeme znát jak vztah pro proud (průtok) pro jeho derivaci, potřebujeme výraz v (4.11) ještě jednou derivovat. To bychom určitě zvládli i obecně, situaci si ale trochu zjednodušíme konkrétním předpokladem o lineární závislosti $C(u_C) = C(u_2) = k \cdot u_2$. Výpočty to lehce zjednoduší, závěry, kvůli kterým tento výpočet provádíme, to neovlivní. Budeme tedy psát

$$i_1 = i_C = (k \cdot u_2 \cdot u_2)' = (k \cdot u_2^2)' = 2k u_2 u_2' \quad (4.12)$$

a pro derivaci

$$i_1' = (2k u_2 u_2')' = 2k(u_2' u_2' + u_2 u_2'') = 2k(u_2'^2 + u_2 u_2''). \quad (4.13)$$

Dosadíme-li oba výrazy do (4.4), dostaneme

$$R \cdot 2k u_2 u_2' + L \cdot 2k(u_2'^2 + u_2 u_2'') + u_2 = u_1. \quad (4.14)$$

Přepíšeme-li diferenciální rovnici (4.14) do tvaru odpovídajícího obecnému zápisu podle vztahu (4.8), dostaneme

$$u_2'' + \left(\frac{R}{L} + \frac{u_2'}{u_2}\right) u_2' + \frac{1}{2kL u_2} u_2 = \frac{1}{2kL u_2} u_1 \quad (4.15)$$

a tedy

$$u_2'' + b_1(u_2) u_2' + b_0(u_2) u_2 = a_0(u_2) u_1, \quad (4.16)$$

kde

$$b_1(u_2) = \left(\frac{R}{L} + \frac{u_2'}{u_2}\right)u_2'; \quad b_0(u_2) = a_0(u_2) = \frac{1}{2kLu_2}. \quad (4.17)$$

Získaná diferenciální rovnice zůstává 2. řádu (počet akumulčních prvků se nezměnil), ale zavedení nelineární závislosti kapacity na napětí kondenzátoru způsobilo, že všechny uvedené parametry diferenciální rovnice, tj. $b_1(u_2)$, $b_0(u_2)$ i $a_0(u_2)$ jsou funkcemi výstupního napětí a diferenciální rovnice je tedy nelineární. Protože určená diferenciální rovnice sama definuje závislost výstupního napětí na vstupním, můžeme konstatovat, že parametry soustavy formálně závisí na jejím vstupu. Z toho konečně plyne, že vlastnosti nelineární soustavy nezávisí pouze na struktuře samotné soustavy, nýbrž i na jejím vstupu, což samozřejmě případnou analýzu významně komplikuje.

4.3.3 Laplacova⁴³ transformace

Definice

Laplacova transformace je užitečný matematický nástroj pro transformaci spojitých funkcí času do komplexní roviny. Navzdory skutečnosti, že (jak níže uvidíme) má mnoho společného se zde již zmíněnou Fourierovou transformací, nepoužíváme ji, tak jak Fourierovu transformaci, k rozkladu spojitých funkcí na jednodušší funkce (i když i takový výklad by byl principiálně možný), nýbrž především pro popis lineárních časově invariantních soustav a pro řešení diferenciálních rovnic, které takovéto soustavy popisují.

Laplacova transformace $\dot{X}(p)$ funkce $x(t)$ je definována vztahem

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \dot{X}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (4.18)$$

kde $p = \sigma + j\omega$ je komplexní číslo $-\infty < \sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2 < +\infty$. Přitom se předpokládá, že pro funkci $x(t)$ platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < +\infty \quad (4.19)$$

a že σ_1 a σ_2 lze volit tak, že pro $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$ integrál (4.18) konverguje.

Pokud rozepíšeme jádro transformace e^{-pt} podle reálné a imaginární složky na $e^{-(\sigma+j\omega)t} = e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$, tj.

$$\dot{X}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t} dt \quad (4.20)$$

a srovnáme s definičním vztahem Fourierovy transformace (vztah (2.79))

$$\dot{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt,$$

která reprezentovala rozklad funkce $x(t)$ na harmonické složky charakterizované transformačním jádrem $e^{-j\omega t}$. V souladu s touto filosofií můžeme vyložit význam Laplacovy transformace kromě jiného i jako nástroje na rozklad funkce $x(t)$ na elementární funkce popsané funkcemi typu $e^{-(\sigma+j\omega)t}$. Jaký průběh tyto funkce mají? Jak je výše uvedeno, exponenciální funkci transformačního jádra můžeme rozepsat na součin $e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t}$, v němž první činitel představuje reálnou, pro $\sigma > 0$ exponenciálně klesající a pro $\sigma < 0$ exponenciálně rostoucí funkci. Druhý činitel v uvedeném součinu je komplexní exponenciální funkce, která popisuje harmonický průběh, jak jsme již seznali v kap.2. Součin obou dílčích členů tedy reprezentuje exponenciálně

⁴³ **Pierre Simon de Laplace** (*1749 Beaumont-en-Auge, Normandie, Francie; + 1827 Paříž, Francie) – francouzský matematik (kromě zavedení uvedené transformace jako nástroje pro řešení diferenciálních rovnic, dokázal teoreticky metodu nejmenších čtverců, původně empiricky zavedenou Carlem Gaussem), statistik, astronom (např. velice blízko se dostal ke konceptu černých děr), politik (byl ministrem vnitra za Napoleona Bonaparta).

klesající, či rostoucí harmonické funkce, přičemž rychlost poklesu, či nárůstu je dána parametrem σ , který nazýváme **koeficientem tlumení**, resp. **zesílení**. V případě, že $\sigma = 0$, pak součin samozřejmě reprezentuje netlumený harmonický průběh.

Takových funkcí je ale neprakticky mnoho, proto tato myšlenka, na rozdíl od Fourierovy transformace nenalezla pro rozklad spojitých funkcí praktické uplatnění.

Proto se dále věnujme prvotnímu účelu, pro který byla Laplaceova transformace určena, tj. popis lineárních systémů a řešení diferenciálních rovnic. Protože význam pro praktickou analýzu mají výhradně kauzální systémy, používá se pro tento účel jednostranná varianta

$$\dot{X}(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad (4.21)$$

původní dvoustranné Laplaceovy transformace, určená za podobných podmínek jako dvoustranná transformace – tedy, že $x(t)$ je absolutně integrovatelná v každém konečném intervalu $0 \leq a \leq b < +\infty$ a že lze zvolit σ ($-\infty < \sigma < \operatorname{Re} p$) tak, aby integrál (4.21) pro $\operatorname{Re} p > \sigma$ konvergoval.

Příklad:

Určete Laplaceovu transformaci jednotkové skokové funkce $x(t) = \sigma(t)$.

Řešení:

$$\dot{X}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} [e^{-pt}]_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Pokud si vzpomeneme na příklad v kap.2.6.3, kdy se počítala Fourierova transformace Heavisidovy funkce a výsledek byl $\dot{X}(p) = 1/j\omega$. Určitě lze ve výsledných obrazových funkcích obou příkladů nalézt analogie. □□□

Jak vyplývá z právě řešeného příkladu, lze jednostrannou Laplaceovu transformaci vnímat jako dvoustrannou transformaci funkce vynásobené jednotkovou skokovou funkcí.

Příklad:

Určete Laplaceovu transformaci jednotkového impulzu $x(t) = \delta(t)$.

Řešení:

S využitím vztahu (2.18) je

$$\dot{X}(p) = \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-pt} dt = e^{-p \cdot 0} \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

□□□

Příklad:

Určete jednostrannou Laplaceovu transformaci funkce $x(t) = e^{-at}$.

Řešení:

S využitím vztahu (2.18) je

$$\dot{X}(p) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+p)t} dt = -\frac{1}{p+a} [e^{-(p+a)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{p+a}.$$

Můžeme tedy psát, že jednostranná Laplaceova transformace funkce e^{-at} je $\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{p+a}$.

Tento laplaceovský pár si dobře zapamatujme, v praktických aplikacích je dost užitečný.

□□□

Příklad:

Určete jednostrannou Laplacovu transformaci funkce $x(t) = te^{-at}$.

Řešení:

Integrací per partes dostáváme

$$\begin{aligned}\dot{X}(p) &= \int_0^{\infty} te^{-at} e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = t \Rightarrow u' = t' \\ v' = e^{-(a+p)t} \Rightarrow v = -\frac{1}{p+a} e^{-(a+p)t} \end{array} \right| = -\frac{1}{p+a} [te^{-(p+a)t}]_0^{\infty} + \frac{1}{p+a} \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = \\ &= \frac{1}{p+a} \int_0^{\infty} e^{-(p+a)t} dt = -\frac{1}{(p+a)^2} [e^{-(p+a)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{(p+a)^2}\end{aligned}$$

□□□

Tabulka 4.1 Slovník některých užitečných laplacovských párů určených pomocí jednostranné Laplacovy transformace

$x(t)$	$\dot{X}(p)$	oblast konvergence
$\delta(t)$	1	$\forall p$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{p}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
t^k	$\frac{k!}{p^{k+1}}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$
te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(p) > 0$
$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}(p) > -\operatorname{Re}(a)$

Důležité vlastnosti Laplacovy transformace

Podobně jako u Fourierovy transformace nyní uvedme některé potřebné vlastnosti Laplacovy transformace.

- linearita – princip superpozice**

Nechť $\dot{X}_1(p)$ je laplacovským obrazem funkce $x_1(t)$, tj. $\dot{X}_1(p) = L\{x_1(t)\}$ a také $\dot{X}_2(p) = L\{x_2(t)\}$. Nechť dále jsou α a β konstanty. Pak

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) e^{-pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\alpha x_1(t) \cdot e^{-pt} + \beta x_2(t) \cdot e^{-pt}) dt = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \alpha x_1(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \beta x_2(t) \cdot e^{-pt} dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \cdot e^{-pt} dt + \beta \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \cdot e^{-pt} dt = \\
&= \alpha \dot{X}_1(p) + \beta \dot{X}_2(p) = \alpha \mathcal{L}\{x_1(t)\} + \beta \mathcal{L}\{x_2(t)\}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Je-li R_1 oblast konvergence Laplacovy transformace funkce $x_1(t)$ a R_2 pro případ funkce $x_2(t)$, pak pro výslednou oblast konvergence R' lineární kombinace obou funkcí platí

$$R' \supset R_1 \cap R_2. \tag{4.23}$$

Totéž samozřejmě platí i pro jednostrannou Laplacovu transformaci.

- **inverze časové osy**

$$x(-t) \sim \dot{X}(-p); \tag{4.24}$$

- **změna časového měřítka**

$$x(at) \sim \frac{1}{|a|} \cdot \dot{X}\left(\frac{p}{a}\right); \tag{4.25}$$

- **posun v časové oblasti**

$$x(t - \tau) \sim e^{-p\tau} \cdot \dot{X}(p); \tag{4.26}$$

- **posun v obrazové oblasti**

$$\dot{X}(p - p_0) \sim e^{p_0 t} x(t); \tag{4.27}$$

- **derivace v časové oblasti**

Pro jednostrannou Laplacovu transformaci derivace funkce $x(t)$ je pomocí integrace per partes

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \cdot e^{-pt} dt = \left[x(t) \cdot e^{-pt} \right]_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt. \tag{4.28}$$

První člen na pravé straně výrazu je po dosazení mezí roven $-x(0)$ a druhý člen $p \cdot \dot{X}(p)$. Z toho plyne, že pro první derivaci funkce $x(t)$ je Laplacův obraz roven

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = p \cdot \dot{X}(p) - x(0) \tag{4.29}$$

a za předpokladu nulové počáteční podmínky

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = p \cdot \dot{X}(p). \tag{4.30}$$

Pro n -tou derivaci je podobně

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n \cdot \dot{X}(p) - p^{n-1} x(0) - p^{n-2} x'(0) - \dots - x^{(n-1)}(0), \tag{4.31}$$

resp. opět za nulových počátečních podmínek je

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = p^n \cdot \dot{X}(p); \tag{4.32}$$

- **integrace v časové oblasti**

$$\int_0^t x(\tau) d\tau \sim \frac{1}{p} \dot{X}(p); \tag{4.33}$$

- **konvoluce v časové oblasti**

$$x_1(t) * x_2(t) \sim \tilde{X}_1(p) \tilde{X}_2(p). \quad (4.34)$$

4.3.4 Operátorová přenosová funkce

V kap.4.3.2 jsme dospěli k závěru, že je možné popsat dynamické vlastnosti systému, lineárního i nelineárního, pomocí diferenciální rovnice n -tého řádu vyjadřující vztah mezi vstupní a výstupní veličinou soustavy. Diferenciální rovnice popisující lineární soustavu v obecném tvaru uvádí vztah (4.8) a je

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + b_{n-1}y^{(n-1)}(t) + b_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + b_1y'(t) + b_0y(t) = \\ = a_mx^{(m)}(t) + a_{m-1}x^{(m-1)}(t) + a_{m-2}x^{(m-2)}(t) + \dots + a_1x'(t) + a_0x(t), \end{aligned}$$

kde a_i a b_j jsou buď konstanty, nebo maximálně funkce času. Tuto rovnici se nyní pokusíme převést do Laplaceovy obrazové oblasti. V lineárním případě a **za předpokladu nulových počátečních podmínek** můžeme s využitím (4.31) diferenciální rovnici přepsat do obrazového tvaru

$$\begin{aligned} p^n Y(p) + b_{n-1}p^{n-1}Y(p) + \dots + b_1pY(p) + b_0Y(p) = \\ = a_m p^m X(p) + a_{m-1}p^{m-1}X(p) + \dots + a_0X(p).^{44} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Laplaceovou transformací jsme tedy diferenciální rovnici převedli na polynomiální algebraickou rovnici, což je současně prvním krokem řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace. Algebraickou rovnici vyřešíme a získané řešení formálně zpětnou Laplaceovou transformací převedeme zpět do originální domény. My ale nadále sledujeme naše specifické zájmy. Vytkneme-li na příslušných stranách rovnice obrazové funkce $Y(p)$ a $X(p)$, dostaneme

$$(p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0) \cdot Y(p) = (a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_0) \cdot X(p) \quad (4.36)$$

a podělíme-li obě strany výrazem $(p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0) \cdot X(p)$, máme konečně

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(a_m p^m + a_{m-1}p^{m-1} + \dots + a_1p + a_0)}{(p^n + b_{n-1}p^{n-1} + \dots + b_1p + b_0)} \quad (4.37)$$

kde funkci $H(p)$ nazýváme **obrazovou přenosovou funkcí soustavy**, která je rovna poměru obrazů výstupní a vstupní veličiny (za předpokladu nulových počátečních podmínek).

Příklad:

Určete obrazovou přenosovou funkci zapojení podle obr.4.3.

Řešení:

Diferenciální rovnici, která popisuje vlastnosti uvedeného náhradního elektrického modelu, jsem vypočítali v kap.4.3.2 a podle vztahu (4.7) je

$$u_2''(t) + \frac{R}{L} u_2'(t) + \frac{1}{LC} u_2(t) = \frac{1}{LC} u_1(t).$$

Pokud mají funkce $u_1(t)$ a $u_2(t)$ Laplaceovy obrazy $U_1(p)$ a $U_2(p)$, pak za předpokladu nulových počátečních podmínek můžeme psát

$$p^2 U_2(p) + \frac{R}{L} p U_2(p) + \frac{1}{LC} U_2(p) = \frac{1}{LC} U_1(p)$$

⁴⁴ Protože už dobře víme o komplexním charakteru obrazových funkcí, nebudeme kvůli pohodlí už dále (až na ojedinělé výjimky) jejich komplexnost tečkou nad označením funkce zdůrazňovat.

a tedy obrazová přenosová funkce daného obvodu je

$$H(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}. \quad \square\square\square$$

Nyní zkusme určit obrazovou přenosovou funkci nelineární varianty obvodu s diferenciální rovnicí, která podle je (4.15)

$$u_2'' + \left(\frac{R}{L} + \frac{u_2'}{u_2}\right)u_2' + \frac{1}{2kLu_2}u_2 = \frac{1}{2kLu_2}u_1$$

nebo obecněji má tvar podle (4.16)

$$u_2'' + b_1(u_2)u_2' + b_0(u_2)u_2 = a_0(u_2)u_1,$$

Protože jednotlivé členy uvedené diferenciální rovnice jsou dány součiny funkce a derivace určité proměnné, lze její Laplaceovu transformaci počítat (pokud vůbec) pouze pro daný konkrétní případ a nelze obecně stanovit tvar operátorové funkce nelineárního systému.

4.3.5 Rozložení nulových bodů a pólů operátorové přenosové funkce

Pokud jsme obrazovou přenosovou funkci soustavy definovali podle vztahu (4.37) pomocí racionální lomené funkce proměnné p jako

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{(a_m p^m + a_{m-1} p^{m-1} + \dots + a_1 p + a_0)}{(p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0)},$$

můžeme ji vyjádřit i pomocí lomené funkce součinu kořenových činitelů

$$H(p) = \frac{a_m (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (4.38)$$

kde a_m je reálná konstanta, často označovaná jako koeficient zesílení systému. Parametry p_1, p_2, \dots, p_n jsou kořeny tzv. **charakteristické rovnice**, kterou vytvoříme položením polynomu ve jmenovateli operátorové přenosové funkce rovno nule

$$p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0. \quad (4.39)$$

Tyto konstanty nazýváme **póly přenosové funkce**. Jsou to hodnoty proměnné p , pro něž operátorová přenosová funkce nabývá limitně nekonečné hodnoty. Naopak parametry z_1, z_2, \dots, z_m jsou kořeny rovnice vzniklé položením polynomu v čitateli operátorové přenosové funkce rovno nule, tj.

$$p^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} p^{m-1} + \dots + \frac{a_1}{a_m} p + \frac{a_0}{a_m} = 0. \quad (4.40)$$

Nazýváme **je nulové body** operátorové přenosové funkce. Logicky jsou to hodnoty proměnné p , pro něž operátorová přenosová funkce nabývá nulové hodnoty. Pokud jsou parametry operátorové přenosové funkce a_i, b_j reálné, pak jak póly, tak nulové body mohou být reálné i komplexní. Jsou-li komplexní, jsou po dvojicích komplexně sdružené.

Příklad:

Určete nulové body a póly operátorové přenosové funkce

$$H(p) = \frac{3p + 9}{p^3 - 2p - 4}.$$

Řešení:

Operátorovou přenosovou funkci můžeme přepsat do tvaru

$$H(p) = \frac{3p+9}{p^3-2p-4} = 3 \frac{p+3}{(p-2)(p^2+2p+2)} = 3 \frac{p+3}{(p-2)(p+1+j)(p+1-j)}.$$

Z toho plyne, že přenosová funkce má jeden nulový bod $z_1 = -3$, zesílení soustavy je $a_1 = 3$ a jeden reálný pól $p_1 = 2$ a dva komplexně sdružené $p_{2,3} = -1 \pm j$.

Co nám tyto hodnoty dále říkají o vlastnostech danou přenosovou funkcí definované soustavy, si uvedeme později. □□□

4.3.6 Frekvenční přenosová funkce a frekvenční charakteristiky

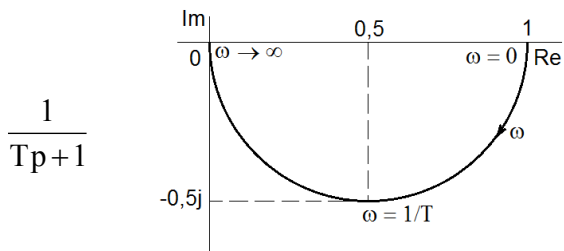
Jak jsme již dříve uvedli, Laplacova proměnná má obecně komplexní charakter a můžeme ji také psát ve tvaru $p = \sigma + j\omega$, kde σ je koeficient tlumení a $\omega = 2\pi f$ je kruhová (úhlová) frekvence harmonického signálu. Předpokládejme nyní, že koeficient tlumení $\sigma = 0$. Pak po dosazení za p v operátorové přenosové funkci dostáváme

$$\dot{H}(j\omega) = \frac{\dot{Y}(j\omega)}{\dot{X}(j\omega)} = |\dot{H}(j\omega)| \cdot \arg(\dot{H}(j\omega)). \quad (4.41)$$

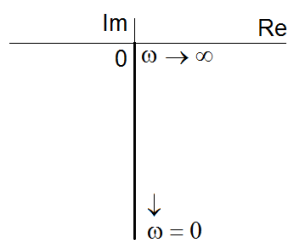
Tuto funkci nazýváme **frekvenční přenosovou funkcí lineárního systému**. Protože opět jde o způsob vnějšího popisu vlastností lineární soustavy, vyjadřuje vztah mezi vstupní a výstupní funkcí soustavy, resp. mezi harmonickými složkami, ze kterých se obě funkce skládají. Modul frekvenční přenosové funkce říká, jaký je vztah mezi amplitudami harmonických složek dané frekvence, ze kterých jsou vstupní i výstupní funkce složeny, argument frekvenční přenosové funkce definuje, jaký je fázový (resp. časový) posun mezi harmonickými složkami vstupu a výstupu.

operátorová
přenosová
funkce

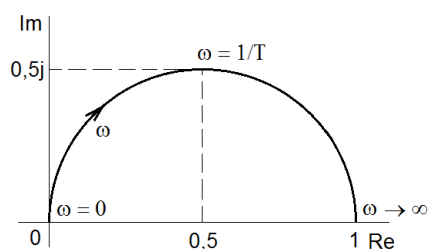
$\dot{H}(j\omega)$



$\frac{1}{Tp}$



$\frac{p}{Tp+1}$



Z frekvenční přenosové funkce odvodíme frekvenční charakteristiky systému.

Frekvenční charakteristika je především grafické vyjádření frekvenční přenosové funkce systému – je to geometrické místo koncových bodů vektorů přenosu pro frekvence v intervalu $0 \leq \omega < \infty$.

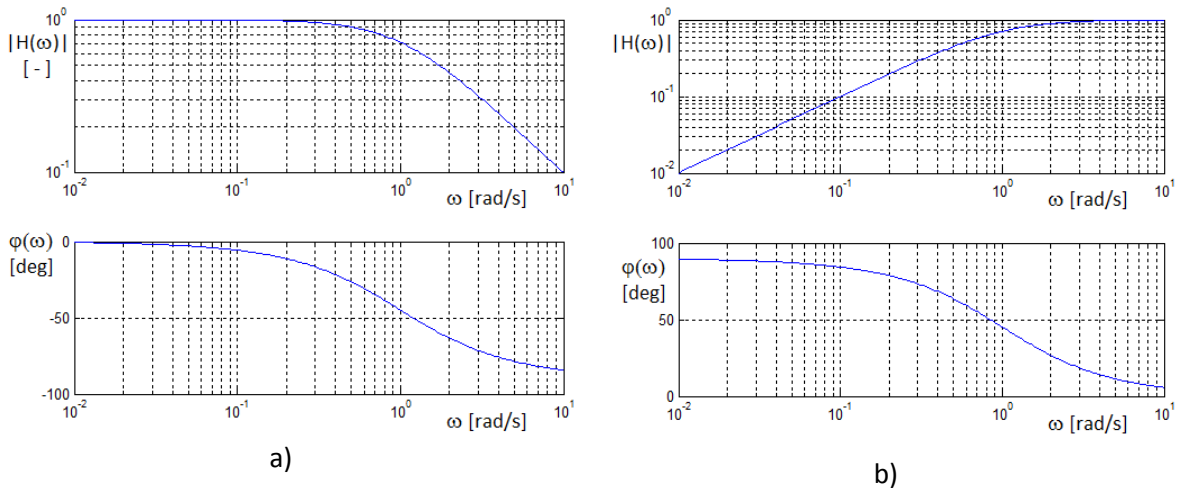
Frekvenční charakteristiky vyjadřujeme zpravidla dvěma způsoby:

- frekvenční charakteristika v komplexní rovině;
- modulová a fázová charakteristika.

ad a)

V tomto případě kreslíme frekvenční charakteristiku v komplexní rovině, do které vynášíme hodnoty frekvenčního přenosu pro úhlovou frekvenci jako parametr; frekvenční vlastnosti systému vyjadřuje křivka v komplexní rovině, jejímž parametrem je kruhová frekvence ω (obr.4.5 pravý sloupec).

Obr.4.5 Příklady frekvenčních charakteristik v komplexní rovině pro vybrané typy jednoduchých operátorových přenosových funkcí.



Obr.4.6 Modulová a fázová frekvenční charakteristika (s použitím logaritmického měřítka) systému s operátorovou přenosovou funkcí – a) $H(p) = 1/(p+1)$; b) $H(p) = p/(p+1)$, tj. charakteristiky pro systémy s přenosovými funkcemi podle obr.4.5 s $T = 1$.

ad b)

Frekvenční vlastnosti systému určují dvě funkce - závislost modulu frekvenčního přenosu na frekvenci a závislost fáze frekvenčního přenosu na frekvenci (obr.4.6).

$$H_m(\omega) = |H(\omega)| \quad \text{a} \quad H_\varphi(\omega) = \arg[H(\omega)] \quad (4.42)$$

Velice praktickým nástrojem, jak získat orientační představu o tvaru modulové a frekvenční charakteristiky lineární soustavy jsou tzv. **Bodeho charakteristiky**⁴⁵, které využívají k zobrazení frekvenčních přenosových vlastností soustavy logaritmického vyjádření modulu frekvenční charakteristiky ve tvaru

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(\omega)|. \quad (4.43)$$

Decibely, v nichž je průběh modulové frekvenční charakteristiky vyjádřen, jsou bezrozměrnou jednotkou vycházející z poměru dvou veličin. V tomto případě je vztažná referenční hodnota rovna jedné. Logaritmická závislost je použita ze dvou důvodů. Jednak ji lze využít pro převod součinu dvou veličin na součtové vyjádření (tuto skutečnost oceníme, pokud si polynom v čitateli a jmenovateli přenosové funkce rozepíšeme na součiny kořenových činitelů), jednak umožňuje lépe postihnout vysokou dynamiku hodnot modulu frekvenční přenosové funkce. Multiplikativní konstanta, ve vztahu (4.43) je to 20, udává míru dynamiky. Hodnota modulové Bodeho charakteristiky rovna 20 dB znamená, že hodnota logaritmu modulu je rovna jedné, tj. $|H(\omega)| = 10$, tedy 10krát větší než referenční jednotkový přenos, který znamená, že se amplituda vstupní harmonické funkce průchodem daným lineárním systémem nemění. Frekvenční osy jak modulové, tak fázové charakteristiky jsou rovněž v dekadickém logaritmickém vyjádření, tj. $\log_{10} \omega$.

Konstrukce Bodeho lineárního odhadu průběhu frekvenčních charakteristik vychází z vyjádření frekvenční přenosové funkce pomocí normovaných kořenových činitelů s jednotkovým absolutním členem, tj. ve tvaru

⁴⁵ **Hendrik Wade Bode** (* 1905, Madison, WI, USA, +1982, Cambridge, MA, USA) byl americký inženýr, vědec a vynálezce nizozemského původu, zabývající se zejména problematikou teorie řízení a telekomunikace. V obou oblastech významně přispěl k rozvoji jak obsahu, tak používané metodologie.

$$H(\omega) = a_m \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + j \frac{\omega}{-z_i}\right)}{\prod_{i=1}^n \left(1 + j \frac{\omega}{-p_i}\right)}, \quad (4.44)$$

V logaritmickém vyjádření pak můžeme pro modulovou charakteristiku psát

$$\begin{aligned} H_{dB}(\omega) &= 20 \log_{10} |H(\omega)| = \\ &= 20 \log_{10} a_m + \sum_{i=1}^m 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{-z_i} \right| - \sum_{i=1}^n 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{-p_i} \right| \end{aligned} \quad (4.45)$$

a pro fázovou charakteristiku

$$\begin{aligned} \varphi_H(\omega) &= \arg(H(\omega)) = \\ &= \sum_{i=1}^m \arg \left(1 + j \frac{\omega}{-z_i} \right) - \sum_{i=1}^n \arg \left(1 + j \frac{\omega}{-p_i} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pro každý z kořenových činitelů odhadujeme tvar segmentu frekvenční charakteristiky pro

- velice nízké frekvence, teoreticky pro $\omega \rightarrow 0$;
- velice vysoké frekvence, tj. teoreticky pro $\omega \rightarrow \infty$;
- a v okolí tzv. mezní, či zlomové frekvence.

Postup odhadu tvaru Bodeho frekvenčních charakteristik si ukažme na několika konkrétních případech.

Příklad:

Nakreslete Bodeho charakteristiky systému s frekvenční přenosovou funkcí

$$H(\omega) = 1 + \frac{j\omega}{20}.$$

Řešení:

Nejdříve uvažme případ velmi nízkých frekvencí, tj. $\omega/20 \ll 1$, resp. když $\omega \ll 20$ [rad/s]. Tehdy

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| 1 + j \frac{\omega}{20} \right| \rightarrow 20 \log_{10} |1| \rightarrow 0.$$

Pro druhý mezní případ potřebujeme, aby $\omega/20 \gg 1$, resp. aby $\omega \gg 20$ [rad/s]. V tom případě

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| j \frac{\omega}{20} \right| \rightarrow 20 \log_{10} \left| \frac{\omega}{20} \right|.$$

Graf této funkce je, za předpokladu logaritmického měřítka frekvenční osy, přímka, která protíná frekvenční osu, když $\omega = 20$ [rad/s] (tehdy je $|H(\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |1| = 0$) a jejíž sklon je 20 dB/dekádu (tj. na desetinásobné zvýšení frekvence)⁴⁶. Kombinací průběhů modulové charakteristiky dostáváme

$$|H(\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0, & \text{pro } 0 < \omega < 20; \\ 20 \log_{10} \left| \frac{\omega}{20} \right|, & \text{pro } \omega \geq 20. \end{cases}$$

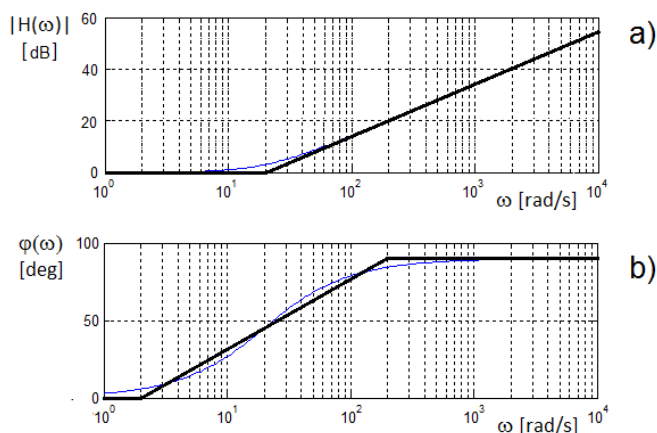
⁴⁶ Nárůst modulu přenosu o 20 dB při zvýšení frekvence na desetinásobek plyne jednoduše ze vztahu $20 \log_{10} 10\omega = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \omega = 20 + 20 \log_{10} \omega$.

Skutečný průběh modulové frekvenční charakteristiky i její Bodeho odhad je na obr.4.7a. Největší odchylka skutečného průběhu od Bodeho odhadu je při $\omega = 20$ [rad/s] a je rovna 3 dB.

Pro fázovou charakteristiku je obecně

$$\varphi_H(\omega) = \arg(H(\omega)) = \arctg\left(\frac{\operatorname{Im}[H(\omega)]}{\operatorname{Re}[H(\omega)]}\right)$$

a v konkrétním případě



Obr.4.7 Frekvenční charakteristiky podle zadání příkladu – a) modulová; b) fázová (skutečný průběh je zobrazen hladkou tenkou čarou, Bodeho odhad silnou lomenou čarou)

Příklad:

Nakreslete Bodeho charakteristiky systému s frekvenční přenosovou funkcí

$$H(\omega) = 5 \frac{10 + j\omega}{2 + j\omega}.$$

Řešení:

Nejdříve přepíšeme zadanou frekvenční přenosovou funkci do příjemnějšího tvaru s normovanými kořenovými činiteli

$$H(\omega) = 5 \frac{10 + j\omega}{2 + j\omega} = 25 \frac{1 + j\frac{\omega}{10}}{1 + j\frac{\omega}{2}}$$

a z toho pro výpočet modulu do tvaru logaritmického

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |25| + 20 \log_{10} \left| 1 + j\frac{\omega}{10} \right| - 20 \log_{10} \left| 1 + j\frac{\omega}{2} \right|.$$

První člen na pravé straně výrazu je jen a jen konstanta (přibližně rovna 28 dB), druhý člen je reprezentován lomenou přímkou o konstantní nulové hodnotě do mezní frekvence 10 [rad/s], poté rostoucí se směrnici 20 dB/dek. Poslední člen reprezentuje opět lomenou přímkou s mezní frekvencí 2 [rad/s], pro nižší frekvence s nulovou konstantní hodnotou, nad touto frekvencí klasející opět se směrnici 20 dB/dek. Výsledný Bodeho odhad modulové frekvenční charakteristiky je dán součtem všech tří dílčích po částech lineárních průběhů (obr.4.8a).

Po částech lineární skladba odhadu fázové charakteristiky zadaného systému je zřejmá z obr.4.8b. První konstantní člen má fázovou charakteristiku nulovou, fázová charakteristika druhého členu $\varphi(\omega) = \arctg(\omega/10)$ je nahrazena po částech lomenou přímkou s body zlomu

$$\varphi_H(\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{20}\right).$$

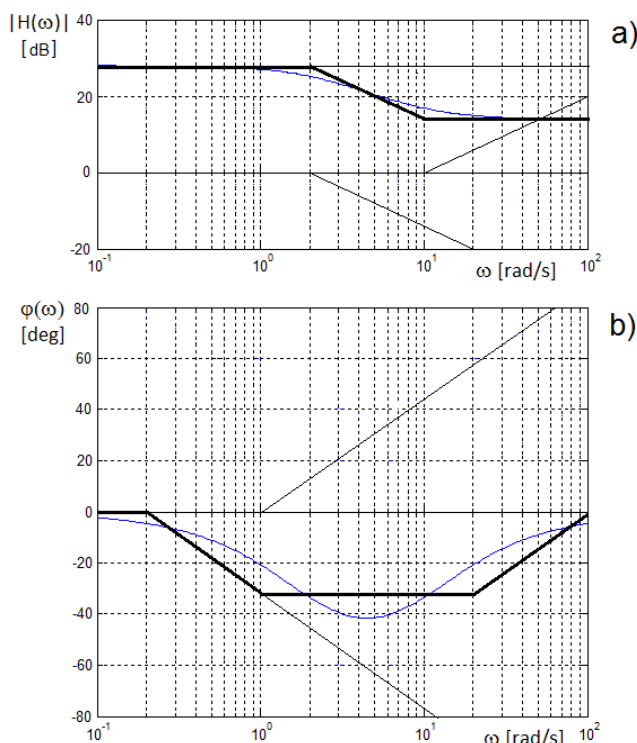
Asymptotické chování je dáno vztahy

$$\varphi_H(\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctg\left(\frac{\omega}{20}\right) = 0$$

a

$$\varphi_H(\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctg\left(\frac{\omega}{20}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Skutečný průběh fázové charakteristiky a její po částech lineární odhad s body zlomu pro frekvence $\omega = 20 \pm$ dekáda [rad/s] je na obr. 4.7b. □□□



Obr.4.8 Skladba frekvenčních charakteristik podle zadání příkladu – a) modulová; b) fázová

pro $\omega = 1$ a $\omega = 100$ [rad/s] a konečně fázová charakteristika třetího členu $\varphi(\omega) = \arctg(\omega/2)$ po částech lomenou přímkou s body zlomu pro $\omega = 0,2$ a $\omega = 20$ [rad/s]. $\square\square$

4.3.7 Časové charakteristiky

Impulzní charakteristika

Obrazová přenosová funkce systému $H(p)$ je podle vztahu (4.37) definována za předpokladu nulových počátečních podmínek jako poměr obrazů výstupního a vstupního signálu

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}.$$

Z toho plyne, že obraz výstupního signálu můžeme spočítat, známe-li přenosovou funkci a obraz vstupního signálu, jako jejich součin, tj.

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p). \quad (4.47)$$

Dále, v kap.2.4.2 jsme zavedli pojem konvoluce, který vyjadřoval vztah mezi dvěma funkcemi (signály) téhož argumentu. Podle vztahu (2.44) platí pro funkce $x_1(t)$ a $x_2(t)$, že

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - \tau) \cdot x_2(\tau) \cdot d\tau,$$

přičemž bylo dále uvedeno, že v Laplacově i Fourierově doméně platí (vztah (2.31))

$$\mathcal{L}(x_1(t) * x_2(t)) = X_1(p) \cdot X_2(p),$$

resp.

$$\mathcal{F}(x_1(t) * x_2(t)) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega).$$

Tedy, Laplacův, resp. Fourierův obraz konvoluce je roven součinu obrazů obou funkcí, které do konvoluce vstupují.

Jestliže vztah (4.47) říká, že obraz $Y(p)$ výstupního signálu $y(t)$ systému je dán součinem přenosové funkce systému s obrazem vstupního signálu, pak musí platit, že časový průběh výstupního signálu můžeme určit pomocí konvoluce vstupního signálu s nějakou časovou funkcí, která by dokázala charakterizovat vlastnosti systému. Otázkou je, jaká je to časová funkce?

Předpokládejme, že obrazem vstupního signálu je $X(p) = 1$. V tom případě je

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p) = H(p) \cdot 1 = H(p). \quad (4.48)$$

Z toho vyplývá, že se přenosová funkce rovná obrazu výstupního signálu systému vybuzeného funkcí s jednotkovým Laplacovým obrazem (případně ekvivalentně Fourierovým obra-

zem). Takovou funkcí je jednotkový Diracův impuls. Tedy obrazová přenosová funkce spojitého systému je rovna Laplaceově transformaci odezvy $h(t)$ systému na jednotkový impuls,

$$H(p) = \mathcal{L}(h(t)) , \quad (4.49)$$

případně naopak

$$h(t) = y(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)). \quad (4.50)$$

Systém tedy můžeme charakterizovat odezvou $h(t)$ na jednotkový impuls, která je určena zpětnou Laplaceovou transformací obrazové přenosové funkce (zpětnou Fourierovou transformací frekvenční přenosové funkce). Protože tato odezva charakterizuje vlastnosti systému, nazýváme ji **impulzní charakteristikou** systému. Na rozdíl ode všech dosud uvedených způsobů popisu lineárního systému má impulzní charakteristika vlastnosti časové funkce.

Z uvedeného také vyplývá, že odezvu systému na buzení libovolným vstupním signálem můžeme počítat jako konvoluci časového průběhu vstupního signálu s impulzní charakteristikou systému. Je proto

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot x(t - \tau) \cdot d\tau = \int_0^t h(t - \tau) \cdot x(\tau) \cdot d\tau . \quad (4.51)$$

Jednotkový impuls má nekonečně široké konstantní spektrum (to jsme si ukázali v kap.2.6.3), tedy přivedení tohoto signálu na vstup systému se rovná přivedení úplné směsi harmonických signálů o frekvencích od 0 do ∞ Hz se stejnými amplitudami. Takový signál ovšem není žádný reálný systém schopen převést bez deformace. Impulzní charakteristiku tedy vnímáme jako systémem zdeformovaný Diracův impuls a podle průběhu či vlastností takto zdeformovaného signálu můžeme usuzovat na vlastnosti systému.

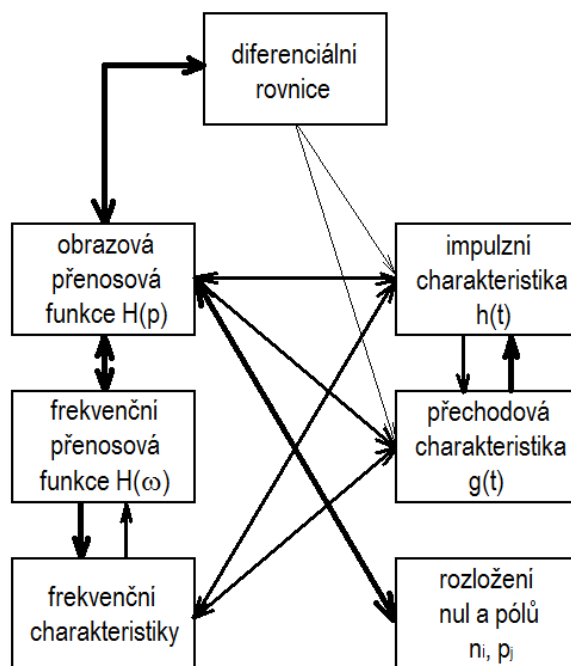
Přechodová charakteristika

Podobně jak je impulzní charakteristika odezvou systému na jednotkový impuls, je možné popsat vlastnosti i pomocí odezvy na druhý základní jednorázový signál, tj. na jednotkový skok. Tuto odezvu nazýváme přechodovou charakteristikou systému a označujeme ji $g(t)$. Protože Laplaceovým obrazem jednotkového skoku je $\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$, je

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{H(p)}{p}\right). \quad (4.52)$$

4.3.8 Vzájemné vztahy mezi různými formami vnějšího popisu lineárního systému

Na obr.4.9 je zobrazeno všech sedm dříve uvedených způsobů vnějšího popisu lineárních systémů. Používané vzájemné převody jsou v obrázku vyznačeny spojniciemi mezi jednotlivými způsoby popisu, čím jednodušší a používanější převod, tím je spojnice mezi popisy silněji vyznačena. Obecně lze konstatovat, že všechny způsoby vnějšího



Obr.4.9 Vzájemné převody různých forem vnějšího popisu lineárních systémů

popisu lineárních systémů jsou si vzájemně ekvivalentní (kromě rozložení nul a pólů), je jen otázka jak potřeba, jak praktické a jak obtížné jsou vzájemné převody.

Mnohé z těchto převodů jsme uvedli v kapitolách pojednávajících o jednotlivých formách popisu. Elementární a velice často používaný je převod mezi diferenciální rovnicí a obrazovou přenosovou funkcí, vycházející z Laplaceova obrazu derivace. Podobná situace je převodem obrazové přenosové funkce na frekvenční přenosovou funkci a naopak, resp. dále na frekvenční charakteristiky. Obtížnější je určení analytické přenosové funkce (frekvenční, obrazové) z naměřených hodnot frekvenčních charakteristik, většinou se tak děje přibližnou aproximací, je-li zadán předpokládaný či známý řád systému nebo alespoň požadavek na přesnost aproximace. Jednoduchý je i převod mezi časovými charakteristikami (impulzní charakteristika je derivací přechodové charakteristiky) a převod mezi časovými charakteristikami a přenosovými funkcemi. Vztahy mezi frekvenční a časovou oblastí již tak jednoduché nejsou.

4.4 Vnitřní (stavový) popis

Pojďme se vrátit ke stále opakovaně používanému pasivnímu lineárnímu elektrickému modelu cévního segmentu, jak je znovu ukázán na obr.4.10.

Nyní použijme veličiny, které popisují integrační (akumulační) charakter obou prvků, tj. napětí na kapacitě $u_C(t)$ a proud indukčnosti $i_L(t)$, k popisu dějů uvnitř obvodu (stavového popisu).

Z definice napětí na kondenzátoru je

$$u'_C = \frac{1}{C} \cdot i_C = \frac{1}{C} \cdot i. \quad (4.53)$$

Az rovnice

$$R \cdot i + L \cdot i' + u_C = u_1 \quad (4.54)$$

dostáváme po normalizaci a separaci derivace proudu

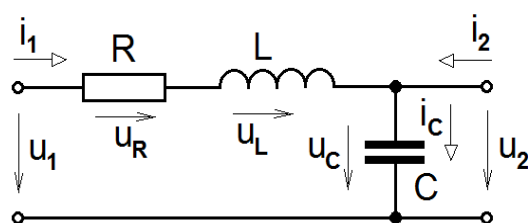
$$i' = -\frac{1}{L} \cdot u_C - \frac{R}{L} \cdot i + u_1. \quad (4.55)$$

Vytvoříme-li vektor veličin $\mathbf{s} = (u_C, i)^T$ a jejich derivací $\mathbf{s}' = (u'_C, i')^T$, pak můžeme zapsat obě výše uvedené rovnice v maticové tvaru

$$\begin{bmatrix} u'_C \\ i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u_1]. \quad (4.56)$$

Vektor $\mathbf{s} = (u_C, i)^T$ je stavový vektor systému.

Obecně lze výše uvedenou rovnici zapsat jako soustavu n diferenciálních rovnic 1. řádu (n je počet stavových akumulacích proměnných, n je i řád systému) jako



Obr.4.10 Náhradní lineární elektrické schéma

$$\begin{bmatrix} s'_1 \\ s'_2 \\ \vdots \\ s'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad (4.57)$$

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

kde $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)^T$ je stavový vektor (vektor stavových veličin), matice $\mathbf{A}(n,n)$ je **matice dynamiky systému** (matice vnitřních vazeb, matice zpětných vazeb, matice systému) a matice $\mathbf{B}(n,m)$ je **matice vstupních vazeb systému** (vstupní matice). Tento zápis definuje tzv. **první stavovou rovnici systému**. **Druhá stavová rovnice** definuje vztah mezi výstupními veličinami systému a jeho stavovými a vstupními veličinami. Tedy

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad (4.58)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}$$

kde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ je vektor výstupních veličin, matice $\mathbf{C}(r,n)$ je **matice vazeb stavu systému na výstup** (**výstupní matice systému**) a matice $\mathbf{D}(r,m)$ je **matice přímých vstupně-výstupních vazeb**.

Protože v úvodním příkladu je výstupní napětí u_2 definováno pomocí stavových a vstupních veličin jednoduchým vztahem

$$u_2 = u_C, \quad (4.59)$$

má druhá (výstupní) stavová rovnice zadaného elektrického obvodu tvar

$$[u_2] = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} u_C \\ i \end{bmatrix} + [0][u_1]. \quad (4.60)$$

Nyní opět předpokládejme, že kapacita C závisí na napětí na kondenzátoru (obr.4.4), z pohledu modelovaného cévního segmentu, že roztažnost cévy závisí rozumně na tlaku krve uvnitř cévy. Pak lze znovu podle vztahu (4.10) psát

$$u_C \cdot C(u_C) = \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$$

a z toho

$$u'_C \cdot C(u_C) + u_C \cdot C'(u_C) \cdot u'_C = i \quad (4.61)$$

a

$$u'_C = \frac{1}{C(u_C) + u_C \cdot C'(u_C)} i = \frac{1}{F(u_C)} i, \quad (4.62)$$

což je první napěťová stavová rovnice uvedeného systému, druhá, tj. proudová stavová rovnice zůstává nezměněna, tj. podle (4.55)

$$i' = -\frac{1}{L} \cdot u_C - \frac{R}{L} \cdot i + u_1.$$

Rovnici dynamiky v maticovém tvaru pak můžeme psát

$$\begin{bmatrix} u_c' \\ i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/F(u_c) \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} \cdot [u_1] \quad (4.63)$$

Výstupní rovnice zůstává táž jako v původním lineárním případě, tj. platí (4.60). Znamená to, že pro nelineární případ je alespoň jeden prvek použitých matic nekonstantní, nebo jinak, závislý na stavových proměnných.

4.5 Chování systémů

4.5.1 Základní jevy v systémech

Existují dvě základní příčiny dynamiky systémů a různých forem jeho chování. Primární příčinou dynamiky je působení okolí na systém prostřednictvím vstupních signálů, sekundární příčinou jsou vlastnosti systému, reprezentované např. jeho pamětí, která závisí na struktuře a parametrech systému. Chceme-li odhalit vlastnosti systému, je potřeba zvolit způsob experimentální analýzy. Dva výše zmíněné faktory ovlivňující chování systému jsou důvodem pro existenci dvou základních typů experimentování⁴⁷:

- zkoumání vlivu počátečního stavu;
- zkoumání vlivu vstupního signálu.

Zkoumání vlivu počátečního stavu

V čase t_0 se systém vždy nachází vlivem své předcházející činnosti ve stavu, popsaném obecně vektorem hodnot $s(t_0)$ stavových veličin. Tento stav definuje tzv. **fyzikální počáteční podmínky**. Vhodným uspořádáním experimentu lze s hodnotami fyzikálních počátečních podmínek manipulovat. Poté bez přivedení vstupu analyzujeme chování systému. Reakci systému za těchto podmínek (reakci na počáteční stav bez vlivu externího vstupu) nazýváme **přirozenou odezvou systému**.

Přirozená odezva má tři základní typy průběhu:

- časem odeznívá (zaniká);
- ustálí se v konečných mezích (osciluje nebo je konstantní, ale nenulová);
- neohraničeně roste;
- nestane se vůbec nic.

Zkoumáním přirozené odezvy lze zjišťovat:

- stabilitu (sledováním konvergence);
- linearitu (sledováním podobnosti odezev při různých počátečních podmínkách);
- dynamické vlastnosti systému podle přechodu systému do nového stavu - rychlost přechodu, monotónnost či oscilační charakter přechodu, kmitočet oscilací, apod.

Zkoumání vlivu vstupního signálu

Abychom zjednodušili analýzu chování systému, je vhodné vyloučit vliv počátečních podmínek, systém se musí nacházet v nulovém počátečním stavu. Odpověď systému na buzení jednoduchým vstupním buzením, jehož vlastnosti v časové i frekvenční doméně jsou známy, nazýváme **vnucená (vynucená) odezva**. Nejčastěji používané budicí signály jsou jednotkový impuls, jednotkový skok, resp. harmonický signál.

Na vnucené odezvě zkoumáme

- tvar přechodného děje (chování systému z počátečního do koncového stavu);
- ustálený stav (stav, kdy zaniká pohyb systému).

⁴⁷ Uvedené dělení je v podstatě důsledek matematického přístupu a nástrojů, které matematická analýza systémů používá. Kdyby to bylo třeba či užitečné, bylo by možné oba případy ztotožnit tak, že bychom považovali odezvu na počáteční podmínky za odezvu na vstupní impulsní buzení na počátku časové osy.

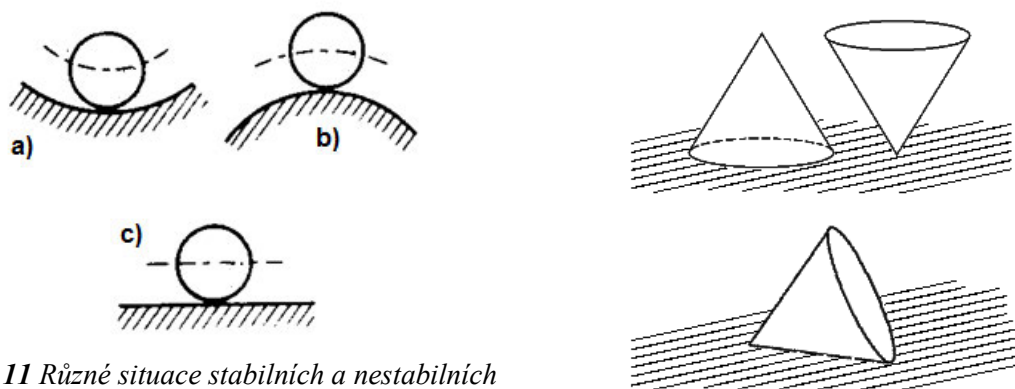
Celková odezva je dána kombinací přirozené odezvy a vnucené odezvy. U lineárních systémů je kombinace daná součtem obou odezev.

4.5.2 Stabilita

Základní pojmy

V kap.1.3.2 jsme si uvedli obecnou definici stability jako schopnost systému udržet si při změně vstupů a stavů svých prvků nezměněnou vnější formu (chování) i navzdory třeba i velice bouřlivým procesům probíhajícím uvnitř systémů. O něco méně obecně lze **stabilitu** definovat jako vlastnost systému, která charakterizuje jeho schopnost udržet si své chování či rysy v předepsaných mezích i za případného vnějšího rušivého působení. Navzdory obecnosti těchto definic, vyplývá z nich, že stabilita je vnitřní vlastností systému. Souvisí ale s vnitřním stavem systému, který označujeme jako **rovnovážný stav**.

Rovnováha je relativně stálý stav systému, vzniklý vyrovnáním vlivů na systém působících. Rovnovážné stavy mohou být stabilní, neutrální (tzv. na mezi stability) nebo nestabilní. Stabilita obecně závisí jednak na vlastnostech samotného systému (zejména v případě lineárních systémů), jednak může záviset i na charakteru a působení prostředí na systém (v případě nelineárních systémů). Stabilitu či nestabilitu rovnovážného stavu vyšetříme pomocí malého vychýlení systému z rovnovážného stavu. Pokud se systém vrátí do původního stavu, je rovnovážný stav systému stabilní. Pokud po vychýlení opouští systém původní rovnovážný stav, je rovnovážný stav nestabilní. Konečně, pokud malá porucha vychýlí systém z rovnovážného stavu a systém zůstává v tom stavu, do kterého se dostal působením poruchy, hovoříme o mezní stabilitě.



Obr.4.11 Různé situace stabilních a nestabilních systémů, příp. systémů na mezi stability

Příklady těchto situací jsou zobrazeny na obr.4.11. V levé polovině obrázku je koule na podložkách různého tvaru. Ať se koule pootočí jakýmkoliv způsobem, zůstává sama o sobě v tomtéž stavu. Chování celého systému ovlivňuje tvar podložky. Situace a) popisuje chování koule uvnitř kulové plochy většího poloměru. Ať je koule jakkoliv vychýlena, vrací se v tomto případě zpět do původního rovnovážného stavu, zpravidla tlumenými kmitavými pohyby - systém v tomto rovnovážném stavu je stabilní. Případ b) popisuje chování koule na vrcholu konkávní kulové plochy. Při vychýlení z rovnovážné pozice tuto polohu opouští a již se do ní nevrací - rovnovážný stav je v tomto případě nestabilní. Konečně na rovné podložce se koule působením vnější síly přemístí do nové polohy a v této poloze zůstává - rovnovážný stav je neutrální, resp. na mezi stability. Kužely v pravé polovině obrázku reprezentují systém, jehož rovnovážné stavy závisejí na systému samotném, nikoliv na vlastnostech prostředí, ve kterém se nachází. Stojí-li kužel na své podstavě, je ve stabilním rovnovážném stavu a ani malé vychýlení kuželu nezpůsobí jeho převrácení. Naopak, stojí-li kužel na svém vrcholu, nachází se v nestabilním rovnovážném stavu, jakékoliv sebemenší vychýlení způsobí převrácení kužele. Poslední poloha, kdy se kužel leží na svém plášti, reprezentuje neutrální rovnováhu. Kužel se působením vnější síly pootočí a zůstává v nové poloze.

Pro určení stability používáme dva základní přístupy, vyplývající ze dvou výše zmíněných systémových jevů (kap.4.5.1):

- stabilita vůči počátečnímu stavu (daná konvergencí přirozené odezvy);
- stabilita vynuceného pohybu.

Stabilita vynuceného pohybu

Na stabilitu vynuceného pohybu usuzujeme podle tendence systému reagovat přiměřeně na podnět konečné délky a konečné velikosti a podle tendence chování systému jeho zániku podnětu.

Systém je stabilní, pokud na každý ohraničený vstup $x(t)$ (co do velikosti hodnot) reaguje rovněž ohraničeným výstupem (stabilita ohraničený vstup - ohraničený výstup, *Bounded Input - Bounded Output* BIBO). Dle této definice lze experimentálně ověřit pouze nestabilitu - jakmile je nalezen takový vstup, pro který se systém chová nestabilně, je systém nestabilní. Pokud na všechny vyzkoušené ohraničené vstupní signály reaguje systém stabilně, neznamená to ještě, že neexistuje žádný vstup, na který by reagoval nestabilně.

Nutnou a postačující podmínkou pro BIBO stabilitu je absolutní integrovatelnost jeho impulsní charakteristiky, tj. musí platit (*Hurwitzovo*⁴⁸ **kritérium ve spojitě časové oblasti**)

$$\int_0^{\infty} |h(t)| dt = V < \infty, \quad (4.64)$$

Stabilita vůči počátečnímu stavu

Asymptoticky stabilní systém je takový systém, jehož přirozená odezva časem zaniká.

Příklad:

Rozhodněme, zda je stabilní systém popsáný operátorovou přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p+3}.$$

Řešení:

Ke zjištění stability použijme pravidlo podle vztahu (4.64) a ověříme jaký má tvar impulzní odezva systému. Připomeňme, že pro Laplaceův obraz výstupní veličiny $Y(p)$ platí

$$Y(p) = H(p) \cdot X(p),$$

kde $X(p)$ je obraz vstupní veličiny. Pro Diracův impulz je $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$, tedy pro odezvu na jednotkový Diracův impulz, tj. pro impulzní charakteristiku, je (podle vztahu (4.50))

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)).$$

Abychom určili průběh impulzní charakteristiky, stačí spočítat zpětnou Laplaceovu transformaci zadané přenosové funkce.

V tabulce 4.1 můžeme najít, že obrazu $1/(p+a)$ odpovídá časová funkce e^{-at} . V našem případě, kdy $a = 3$, je impulzní charakteristika zadaného systému $h(t) = e^{-3t}$. Tato funkce je monotónně klesající, pro $t = 0$ nabývá hodnoty $h(0) = 1$, pro $t \rightarrow \infty$ konverguje k nule; její integrál

$$\int_0^{\infty} |e^{-3t}| dt = \int_0^{\infty} e^{-3t} dt = -\frac{1}{3} [e^{-3t}]_0^{\infty} = -\frac{1}{3} [0 - 1] = \frac{1}{3} < \infty.$$

Podmínka (4.64) je splněna, systém je stabilní.

□□□

⁴⁸ **Adolf Hurwitz** (*1859, Hildesheim, dříve Hannoverské království, nyní Německo, +1919 Zürich, Švýcarsko), německý matematik, po kterém jsme zdělili takové pojmy jako jsou Hurwitzův determinant, matice, polynom, Hurwitzův prostor a věty z oboru komplexní analýzy, teorie čísel a mnoho dalších. Důsledky jeho teoretické práce zásadně využívá teorie řízení. Kdo by nechtěl žít takový plodný život.

Příklad:

Rozhodněme, zda je stabilní systém popsáný operátorovou přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{(p+3)(p-2)}.$$

Řešení:

Abychom mohli použít výše zmíněného vztahu mezi funkcí e^{-at} a jejím Laplacovým obrazem, je potřeba rozložit přenosovou funkci na parciální zlomky, což v tomto případě je

$$j H(p) = \frac{1}{(p+3)(p-2)} = -\frac{1}{5(p+3)} + \frac{1}{5(p-2)}.$$

Celkovou impulzní odezvu složíme z časových funkcí, které získáme zpětnou Laplacovou transformací každého z obou dílčích zlomků. Tedy máme

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = \frac{e^{-3t}}{5} + \frac{e^{2t}}{5}.$$

Zatímco o první funkci můžeme na základě předchozího příkladu konstatovat, že s $t \rightarrow \infty$ konverguje k nule, druhá exponenciála e^{2t} roste s časem nade všechny meze. Systém je proto jako celek nestabilní. $\square\square\square$

Příklad:

Rozhodněme, zda je stabilní systém popsáný operátorovou přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2}.$$

Řešení:

Zkusme tentokrát použít vztah mezi funkcemi $e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)$ a $\omega_0 / [(p+a)^2 + \omega_0^2]$, také uvedený v tabulce 4.1. To znamená, že funkci $H(p)$ musíme poněkud modifikovat.

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{1}{p^2 + 2p + 1 - 1 + 2} = \frac{1}{(p+1)^2 + 1}$$

Oba parametry a i ω_0 jsou rovny jedné a impulzní charakteristika je rovna $h(t) = e^{-t} \cdot \sin(t)$. Tentokrát impulzní charakteristika není monotónní, nýbrž je určena tlumenou sinusoidou. Její integrál je opět konečný (laskavý čtenář si jej určitě dokáže spočítat). Systém je proto rovněž stabilní. $\square\square\square$

Pól přenosové funkce v prvním případě je roven $p_1 = -3$. V druhém příkladu má přenosová funkce póly $p_1 = -3$ a $p_2 = 2$, ve třetím příkladu jsou póly komplexně sdružené $p_{1,2} = -1 \pm j$ s se zápornou reálnou složkou. Pokusme se zvážít, jak bychom mohli této informace použít.

Pól zadané přenosové funkce v prvním příkladu je dán hodnotou $-a$, je proto roven $p_1 = -3$, leží v záporné polorovině komplexní roviny p . Pro kladnou hodnotu pólu přenosové funkce (takovou jakou má druhý pól ve druhém příkladu), tj. pro zápornou hodnotu parametru a je naopak funkce e^{-at} rostoucí nade všechny meze a integrál její absolutní hodnoty je nekonečný. Ve třetím příkladu je reálná část komplexních pólů opět záporná a systém je zase stabilní.

Všechny tyto situace jsou ilustrací dalšího pravidla pro posouzení stability spojitěho lineárního systému, které říká, že **nutnou a postačující podmínkou asymptotické stability lineárního spojitěho systému je, aby měly všechny jeho póly záporné reálné složky**. Pokud má být jeden pól kladnou reálnou složku, je soustava nestabilní. Leží-li jednoduchý nebo komplexně sdružené póly na imaginární ose roviny p , je systém tzv. na mezi stability.

Zobecněná stabilita dle Ljapunova⁴⁹

V příkladu v kap. 4.3.2 jsme si ukázali, že vlastnosti a chování nelineárního systému nezávisí jen na parametrech samotného systému, ale současně i na vlastnostech a charakteru vstupu. Proto v případě nelineárních systémů nelze vystačit se zjednodušeným přístupem ke stabilitě tak, jak jsme ho použili pro systémy lineární. Pojem stability je proto třeba zobecnit.

Nechť je systém popsán stavovou diferenciální rovnicí $\dot{x}(t) = f(x(t))$, kde f je obecně nelineární funkce. Její řešení pro počáteční podmínku $x_1(0)$ označíme $x_1(t)$ a pro málo odlišnou počáteční podmínku $x_2(0) = x_1(0) + \Delta$ je $x_2(t)$. Pro stabilitu je podstatné jaký je rozdíl obou řešení, jestli se počáteční podmínky liší jen málo.

Abychom formalizovali požadavek na rozdíl obou řešení, lze formulovat požadavek na stabilitu systému tak, aby ke každému počátečnímu stavu z α okolí ustáleného stavu existovalo ε okolí tohoto bodu, ze kterého se stav systému v celém průběhu řešení nevzdálí.

Tedy požadavek ustálení stavu systému na původní hodnotě je zaměněn za požadavek malých pohybů kolem rovnovážného stavu.

4.5.3 Kauzalita

V kap.2.4.2 o konvoluci spojitých funkcí jsme zmínili pojem kauzality, přičemž jsme odkázali na podstatu tohoto pojmu do oblasti systémů. Protože už víme, jak užitečné je použití konvolučního integrálu v systémové teorii, pokusme se nyní tento pojem stručně připomenout a současně objasníme vliv kauzality systému na meze konvolučního integrálu.

Uvedli jsme, že kauzální systém je takový, který reaguje na vstupní událost až ve chvíli, kdy se tato událost objeví na vstupu systému. Proto i pro impulzní charakteristiku kauzálního lineárního, časově invariantního systému je

$$h(t) = 0 \text{ pro } t < 0. \quad (4.65)$$

Pokud uplatníme tuto kauzální podmínku na výpočet výstupu lineárního systému pomocí konvolučního integrálu, je

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau. \quad (4.66)$$

Alternativně, vzhledem ke komutativní vlastnosti konvoluce, platí i

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (4.67)$$

Tento vztah ukazuje, že pro výpočet výstupní veličiny $y(t)$ se uplatní pouze ty hodnoty vstupní veličiny $x(\tau)$, pro které $\tau \leq t$.

Na základě podmínky kauzality je vstupní funkce kauzální, pokud je

$$x(t) = 0 \text{ pro } t < 0, \quad (4.68)$$

resp. antikauzální, když

$$x(t) = 0 \text{ pro } t > 0. \quad (4.69)$$

Pak ze vztahů (4.65), (4.66) a (4.67) plyne, že je-li vstupní funkce $x(t)$ kauzální, pak výstupní funkci kauzálního spojitého lineárního a časově invariantního systému počítáme pomocí vztahu

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (4.70)$$

⁴⁹ *Alexandr Michajlovič Ljapunov* (*1857, Jaroslavl, Rusko, +1918 vlastní rukou bezprostředně po smrti své ženy, Oděsa, Rusko nebo Ukrajina?, těžko říct kam v roce 1918 Oděsa patřila), ruský matematik, statistik a fyzik; nejdůležitější přínos z oblasti diferenciálních rovnic a dynamických systémů, zejména jejich stability. Dokázal dokázat centrální limitní větu za podstatně obecnějších podmínek než jeho předchůdci.

5 Matematický popis systémů pracujících v diskrétním čase

5.1 Opět pár myšlenek na úvod, aneb co bychom chtěli v páté kapitole

V předchozí čtvrté kapitole jsme se zabývali způsobem popisu především lineárních systémů pracujících ve spojitém čase. Tato pátá kapitola naváže na všechno to, co jsme minulé kapitole zvládli a bude modifikuje známé skutečnosti pro podmínky lineárních časově invariantních systémů pracujících v diskrétním čase, resp. zkráceně lineárních diskrétních systémů. Probereme různé způsoby popisu jejich vlastností, zmíníme jejich vzájemné souvislosti. Pokusíme se upozornit na odlišnosti oproti systémům spojitým. A snad se podaří i vysvětlit, k čemu se takové vědomosti mohou použít.

V kapitole o spojitých systémech jsme k objasnění nových pojmů a skutečností používali náhradního elektrického modelu cévního segmentu, tedy něčeho skutečného, konkrétního. Diskrétní systémy ale pracují s časovými řadami (nebo chceme-li s diskrétními signály), tj. s posloupnostmi čísel, které často vznikají vzorkováním původních spojitých veličin, méně často vznikají přímo z podstaty analyzovaného procesu⁵⁰. Protože se jedná o posloupnost čísel, je časová řada, se kterou diskrétní systémy pracují, přímo matematickým (abstraktním) popisem (modelem) reálného analyzovaného procesu. Tedy i systém pracující s takovými daty je matematickou abstrakcí a jako s takovou je potřeba s ním zacházet.

V následujícím textu tedy budeme kopírovat strukturu předchozí kapitoly a budeme hledat způsoby popisu vlastností diskrétních systémů ekvivalentní způsobům popisu vlastností systémů spojitých.

5.2 Vnější (vstupní/výstupní) popis

5.2.1 Diferenční rovnice

Protože časové řady jsou matematické struktury v diskrétním čase, nikoliv spojitým, nelze určit jejich derivaci, nýbrž pouze difference. Tedy výchozím způsobem popisu diskrétního systému nemůže být diferenciální rovnice, ale rovnice diferenční, obecně pro lineární systém definovaná výrazem

$$\sum_{i=0}^n b_i y(kT_{vz} - iT_{vz}) = \sum_{i=0}^m a_i x(kT_{vz} - iT_{vz}), \quad (5.1)$$

resp. pro jednotkovou nebo normalizovanou vzorkovací periodu

$$\sum_{i=0}^n b_i y(k - i) = \sum_{i=0}^m a_i x(k - i), \quad (5.2)$$

kde a_i a b_i jsou reálné konstanty, příp. pro časově variantní lineární systémy to mohou být funkce času, tj. $a_i(k)$ a $b_i(k)$. Hodnota n určuje maximální zpoždění pro vzorky výstupní posloupnosti a současně řád systému, m určuje maximální zpoždění pro vzorky vstupní po-

⁵⁰ Např. v případě dob trvání jednotlivých srdečních cyklů, které definují srdeční rytmus nebo jeho variabilitu. Jednotlivé doby trvání srdečních cyklů určujeme v tom okamžiku, kdy se v nějakém signálu popisujícím srdeční cyklus (signál EKG, křivka krevního tlaku, karotidogram, ...) vyskytne takový signálový prvek, na jehož základě lze rozpoznat, že právě nastal rozhodující okamžik pro určení nějakého předem určeného bodu v analyzovaném signálu (výskyt QRS komplexu v signálu EKG, nalezení maximálního systolického tlaku v tlakové křivce, apod). Dobu trvání předchozího srdečního cyklu tedy můžeme určit pouze v tomto okamžiku, ve všech ostatních časech je tato hodnota nedefinovaná. Tato posloupnost je tedy diskrétní ze své podstaty.

sloupnosti zahrnuté do výpočtu. Alternativním zápisem diferenční rovnice může být výraz pro výpočet k-tého výstupního vzorku, který využívá hodnotu k-tého vzorku vstupní posloupnosti a předchozí vzorky jak vstupní, tak výstupní posloupnosti až do zpoždění m , resp. n . Vztah má tvar

$$y(k) = \sum_{i=0}^m \frac{a_i}{b_0} x(k-i) - \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{b_0} y(k-i). \quad (5.3)$$

Z uvedeného rekursivního vztahu je zřejmé, že když chceme počítat hodnotu výstupu pro $k = k_0$, musíme znát hodnoty vstupních vzorků od $x(k_0)$ do $x(k_0 - m)$ a také hodnoty výstupních vzorků od $y(k_0 - 1)$ do $y(k_0 - n)$. Požadavek na vstupní data definuje minimální hodnotu k_0 , tj. $k_0 \geq m$. Pokud se týká požadavku na výstupní data, pak ve chvíli, kdy výpočet začíná, hodnoty skutečných zpožděných výstupních vzorků nejsou známy, je potřeba je stanovit formou počátečních podmínek.

Příklad:

Diferenční rovnice $y(k) = x(k) - 2y(k-1) + y(k-2)$ reprezentuje diskretní, časově invariantní lineární rekursivní⁵¹ systém, přičemž koeficienty diferenční rovnice jsou, za předpokladu, že $b_0 = 1$, $a_0 = 1$, $b_1 = 2$ a $b_2 = -1$. □□□

5.2.2 Transformace Z

Transformace Z je obdobou Laplaceovy transformace pro případ diskretních posloupností. Podobně jako Laplaceova transformace převádí integrodiferenciální rovnice na rovnice algebraické, transformace Z tak činí s rovnicemi diferenčními a tak zjednodušuje případnou analýzu systémů s diskretním časem. Vlastnosti transformace Z jsou podobné vlastnostem transformace Laplaceovy, ale existují i některé významné rozdíly.

Definice

Posloupnost $x(k)$ má dvoustrannou (bilaterální) transformaci Z $X(z)$, pokud existuje řada

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}, \quad (5.4)$$

kde z je obecně komplexní proměnná zpravidla vyjadřovaná v polárním tvaru jako

$$z = r \cdot e^{j\omega_N}, \quad (5.5a)$$

resp. chceme-li zachovat fyzikální význam exponentu, pak

$$z = r \cdot e^{j\omega T_{vz}}, \quad (5.5b)$$

kde r je modul komplexního čísla z a ω , resp. ω_N (pro případ jednotkové vzorkovací periody) je jeho argument. Podobně jako u Laplaceovy transformace, při práci s kauzálními diskretními systémy lze použít tzv. jednostrannou transformaci Z, která je definována jako

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}. \quad (5.6)$$

Zcela zřejmě jednostranná i dvoustranná transformace Z mají tytéž vlastnosti pouze když $x(k) = 0$ pro $k < 0$. Formálně za jednostrannou transformaci Z posloupnosti $x(k)$ může být

⁵¹ **Rekurze** (lat. *recurso* - vrátit se, resp. *recursus* - návrat, zpětný postup). V matematice pojem rekurze používáme v případě definice objektu pomocí sebe sama. V uvedeném případě to znamená, že hodnotu výstupu počítáme, kromě jiných, i ze zpožděných hodnot výstupu. V oblasti diskretních systémů a jejich realizačních schémat pojem rekurze často splývá s pojmem regrese.

považována dvoustranná transformace Z součinu posloupnosti $x(k)$ s diskretním jednotkovým skokem, tj.

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \sigma(k) \cdot z^{-k} . \quad (5.7)$$

Srovnáme-li definici Fourierovy transformace s diskretním časem definované podle vztahu (3.41) jako

$$X(\omega_N) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot e^{-jk\omega_N} , \text{ nebo lépe } X(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot e^{-jk\omega T_{vz}}$$

s definičním vztahem pro transformaci Z se substitucí $z = r \cdot e^{j\omega_N}$, resp. $z = r \cdot e^{j\omega T_{vz}}$ pro $r = 1$, což reprezentuje harmonickou jádrovou funkci s jednotkovou amplitudou, vidíme, že jsou oba vztahy ekvivalentní. Fourierova transformace s diskretním časem tedy může být považována za specifický případ transformace Z , opět podobně jako v případě Fourierovy a Laplaceovy transformace.

Příklad:

Určete transformaci Z diskretního jednotkového impulsu $z(\delta(k))$, který je definován podle vztahu (3.9)

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Jeho jednostrannou transformaci Z spočítáme podle definičního vztahu

$$z(\delta(k)) = 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 0 \cdot z^{-3} + \dots = 1. \quad \square\square\square$$

Příklad:

Určete transformaci Z v čase posunutého diskretního jednotkového impulsu $z(\delta(k-i))$.

Řešení

Pro posunutý diskretní jednotkový impuls je

$$\delta(k-i) = \begin{cases} 1, & k = i; \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Pro jednostrannou transformaci Z pak podle definičního vztahu je

$$z(\sigma(k-i)) = 0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + \dots + 0 \cdot z^{-(i-1)} + 1 \cdot z^{-i} + 0 \cdot z^{-(i+1)} + \dots = z^{-i} = \frac{1}{z^i} .$$

Příklad:

Určete transformaci Z diskretní jednotkové skokové posloupnosti $z(\sigma(k))$.

Řešení

Podle definičního vztahu jednostranné transformace Z je transformace Z jednotkového skoku dána nekonečným součtem $z(\sigma(k)) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$. Abychom získali kompaktnější výraz, vynásobme obě strany $(z-1)$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned} (z-1) \cdot z(\sigma(k)) &= (z-1) \cdot (1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots) = \\ &= (z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) - (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = z. \end{aligned}$$

Z toho pak je

$$z(\sigma(k)) = \frac{z}{z-1} . \quad \square\square\square$$

Tabulka 5.1 Slovník některých užitečných párů pro transformaci Z

$x(k)$	$X(z)$	oblast konvergence
$\delta(k)$	1	$\forall z$
$\delta(k-i)$	z^{-i}	pro $\forall z$ kromě $z=0$, když $i > 0$ nebo $z \rightarrow \infty$, když $i < 0$
$\sigma(k)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$-\sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$a^k \sigma(k)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-a}$	$ z > a$
$-a^k \sigma(-k-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ nebo $\frac{z}{z-a}$	$ z < a$
$ka^k \sigma(k)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a$
$-ka^k \sigma(-k-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a$
$(k+1)a^k \sigma(k)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$ nebo $\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$ z > a$
$\cos(k\omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z^2 - z \cdot \cos \omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$\sin(k\omega_0) \sigma(k)$	$\frac{z \cdot \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cdot \cos \omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$[a^k \cdot \cos(k\omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z^2 - a \cdot z \cdot \cos \omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a$
$[a^k \cdot \sin(k\omega_0)] \sigma(k)$	$\frac{z \cdot a \cdot \sin \omega_0}{z^2 - 2a \cdot z \cdot \cos \omega_0 + a^2}$	$ z > a$
$\begin{cases} a^k, & 0 \leq k \leq N-1; \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$	$\frac{1 - a^N z^{-N}}{1 - az^{-1}}$	$ z > 0$

Důležité vlastnosti transformace Z

- linearita**

Mají-li posloupnosti $x_1(k)$ a $x_2(k)$ Z obrazy $X_1(z)$ a $X_2(z)$, pak platí, že

$$Z[\alpha x_1(k) + \beta x_2(k)] = \alpha X_1(z) + \beta X_2(z), \quad (5.8)$$

Je-li R_1 oblast konvergence transformace Z posloupnosti $x_1(k)$ a R_2 posloupnosti $x_2(k)$, pak pro výslednou oblast konvergence R' je

$$R' \supset R_1 \cap R_2. \quad (5.9)$$

- *inverze časové osy*

$$x(-k) \sim X(z^{-1}); \quad (5.10)$$

- *posun v časové oblasti posloupnosti $x(k) \cdot \sigma(k)$ vpravo*

$$x(k - k_0) \cdot \sigma(k - k_0) \sim z^{-k_0} \cdot X(z); \quad (5.11)$$

- *posun v časové oblasti posloupnosti $x(k)$ vpravo*

$$\begin{aligned} x(k-1) &\sim z^{-1} \cdot X(z) + x(-1); \\ x(k-2) &\sim z^{-2} \cdot X(z) + x(-2) + z^{-1}x(-1); \\ &\vdots \\ x(k-k_0) &\sim z^{-k_0} \cdot X(z) + x(-k_0) + z^{-1}x(-k_0+1) + \dots + z^{-k_0+1}x(-1); \end{aligned} \quad (5.12)$$

- *posun v časové oblasti posloupnosti $x(k)$ vlevo*

$$\begin{aligned} x(k+1) &\sim z \cdot X(z) - x(0) \cdot z; \\ x(k+2) &\sim z^2 \cdot X(z) - x(0) \cdot z^2 + x(-1) \cdot z; \\ &\vdots \\ x(k+k_0) &\sim z^{k_0} \cdot X(z) - x(0) \cdot z^{k_0} - x(1) \cdot z^{k_0-1} - \dots - x(k_0-1) \cdot z; \end{aligned} \quad (5.13)$$

- *násobení a^k*

$$a^k \cdot x(k) \sim X\left(\frac{z}{a}\right); \quad (5.14)$$

ve speciálním případě

$$e^{j\omega_0 k} \cdot x(k) \sim X(e^{j\omega_0} z); \quad (5.15)$$

- *násobení k (příp. derivace v z)*

$$k \cdot x(k) \sim -z \frac{dX(z)}{dz}; \quad (5.16)$$

- *kumulace*

$$\sum_{i=-\infty}^k x(i) \sim \frac{z}{z-1} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z); \quad (5.17)$$

Možná stojí za povšimnutí, že součet $\sum_{i=-\infty}^k x(i)$ je diskrétním ekvivalentem integrace ve spojitě časové oblasti. Operátor pro Laplacovu transformaci je ale $1/p$.

- *konvoluce v časové oblasti*

$$x_1(k) * x_2(k) \sim X_1(z) \cdot X_2(z). \quad (5.18)$$

5.2.3 Obrazová (operátorová) přenosová funkce

Opět ekvivalentně případu se spojitým časem pro diferenční rovnici popisující systém lze vytvořit její obraz Z podobně jak ve spojitém případě za předpokladu nulových počátečních podmínek nejjednodušeji aplikací vztahu (5.12).

Rozepíšeme-li vztah (5.2) do tvaru

$$b_0 y(k) + b_1 y(k-1) + \dots + b_n y(k-n) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_m x(k-m), \quad (5.19)$$

pak s použitím (5.12) a za nulových počátečních podmínek dostáváme

$$b_0 Y(z) + b_1 z^{-1} Y(z) + \dots + b_n z^{-n} Y(z) = a_0 X(z) + a_1 z^{-1} X(z) + \dots + a_m z^{-m} X(z) \quad (5.20)$$

a po několika málo matematických operací konečně máme obrazovou přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}}{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}, \quad (5.21)$$

nebo

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{n-m}(a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m)}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (5.22)$$

pokud je $n \geq m$ a

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m}{z^{m-n}(b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n)}, \quad (5.23)$$

když je $m \geq n$.

Každá z obou variant zápisu má své kouzlo a výhody. Zatímco zápis se zápornými mocninami z podle (5.21) naznačuje úzký vztah mezi přenosovou funkcí a diferenční rovnicí, varianta s kladnými mocninami z podle (5.22), příp. (5.23) zase vede k snadnějšímu výpočtu nulových bodů a pólů a tím i jednodušším úvahám o stabilitě systému.

Samozřejmě je možné, vycházíme-li primárně z frekvenčních vlastností daného systému, vyjádřit obrazovou přenosovou funkci i ve tvaru

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}, \quad (5.24)$$

což jest jen formální úprava, při které by ale neměly mást indexy váhových koeficientů a_i , b_i .

Příklad:

Určete obrazovou přenosovou funkci systému definovanému diferenční rovnicí

$$y(k) = 3x(k) - 2x(k-1) + 2y(k-1) - y(k-2).$$

Řešení

Všechny členy výstupní posloupnosti v diferenční rovnici převedeme na levou stranu, tj.

$$y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) = 3x(k) - 2x(k-1)$$

a pomocí (5.12) a za nulových počátečních podmínek dostáváme

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = 3X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

Z toho už je snadno

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3 - z^{-1}}{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}.$$

Vynásobením čitatele i jmenovatele z^2 dostaneme

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{3z^2 - z}{z^2 - 2z + 1} = \frac{z \cdot (3z - 1)}{z^2 - 2z + 1}. \quad \square\square\square$$

Inverzním postupem lze z operátorové přenosové funkce snadno a rychle určit diferenční rovnici systému.

Příklad:

Určete diferenční rovnici systému ze zadané operátorové přenosové funkce

$$H(z) = \frac{1 + z + z^2}{2z(1 - z)}.$$

Řešení

Čitatele i jmenovatele zadané přenosové funkce vynásobme z^{-2} a dostaneme

$$H(z) = \frac{(1 + z + z^2) \cdot z^{-2}}{2z(1 - z) \cdot z^{-2}} = \frac{z^{-2} + z^{-1} + 1}{2z^{-1} - 2} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

a z toho máme

$$Y(z)(2z^{-1} - 2) = X(z)(z^{-2} + z^{-1} + 1).$$

S využitím (5.12) a za nulových počátečních podmínek dostáváme diferenční rovnici

$$2y(k-1) - 2y(k) = x(k-2) + x(k-1) + x(k)$$

Po přepsání do standardního pořádku je konečně

$$y(k) = y(k-1) - 0,5x(k) - 0,5x(k-1) - 0,5x(k-2).$$

□□□

Logickým pokračováním popisu vlastností lineárního časově invariantního diskrétního systému je rozepsání obrazové přenosové funkce pomocí součinu kořenových činitelů. Vyjdeme-li z tvaru obrazové přenosové funkce podle vztahu (5.24), pak je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{a_m}{b_n} \cdot \frac{(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}, \quad (5.25)$$

kde a_m/b_n představuje frekvenčně nezávislý koeficient zesílení systému, parametry z_1, \dots, z_m jsou kořeny rovnice

$$z^m + \frac{a_{m-1}}{a_m} z^{m-1} + \dots + \frac{a_0}{a_m} = 0 \quad (5.26)$$

nazývané **nulové body obrazové přenosové funkce** a p_1, \dots, p_m jsou kořeny charakteristické rovnice

$$z^n + \frac{b_{n-1}}{b_n} z^{n-1} + \dots + \frac{b_0}{b_n} = 0, \quad (5.27)$$

které nazýváme **póly přenosové funkce** systému.

5.2.4 Frekvenční přenosová funkce a frekvenční charakteristiky

Od abstraktního vyjádření přenosových vlastností lineárních systémů pracujících ve spojitém čase jsme k závislosti přenosových vlastností dané soustavy na frekvenci dospěli substitucí využívající pouze imaginární část komplexní proměnné p , tj. $p = j\omega$, tj. ze všech hodnot komplexní proměnné p nás zajímaly pouze ty, které reprezentují harmonické funkce s jednotkovou amplitudou. Podobně to lze učinit i v případě systémů pracujících s veličinami v diskrétním čase. V tom případě je odpovídající substituce dána vztahem (5.5) pro $r = 1$, tj.

$$z = e^{j\omega N}, \text{ resp. } z = e^{j\omega T_{Vz}}.$$

Potom je frekvenční přenosová funkce dané soustavy definovaná (vyjdeme-li z obrazové přenosové funkce podle (5.22))

$$H(e^{j\omega T_{Vz}}) = H(\omega) = \frac{a_m e^{jm\omega T_{Vz}} + a_{m-1} e^{j(m-1)\omega T_{Vz}} + \dots + a_0}{b_n e^{jn\omega T_{Vz}} + b_{n-1} e^{j(n-1)\omega T_{Vz}} + \dots + b_0}. \quad (5.28)$$

Zatímco u spojitých systémů představovala harmonické funkce imaginární osa v komplexní rovině p , v případě diskrétních systémů je to podle použitého substitučního vztahu jednotková kružnice v komplexní rovině z . Z této skutečnosti vyplývá i jeden velice podstatný rozdíl v průběhu frekvenčních přenosových funkcí pro spojitý systém a pro diskrétní systém. Zatímco pro spojitý systém jsou hodnoty frekvenční přenosové funkce obecně různé pro kmitočty z celého definičního oboru $\langle 0, \infty \rangle$, u diskrétních systémů je vidět, že díky použité substituci se hodnoty přenosové funkce periodicky opakují s hodnotou argumentu rovnou celočíselným násobkům 2π . Je-li argument komplexní exponenciály roven $\omega T_{Vz} = \omega/f_{Vz}$, pak opakuje-li se její průběh s úhlovou periodou 2π , pak to znamená s úhlovou frekvencí ω_{Vz} . V periodě

$\langle 0, \omega_{vz} \rangle$ je průběh frekvenční přenosové funkce symetrický vůči středu, tj. vůči úhlové frekvenci $\omega_{vz}/2$. Totéž samozřejmě platí i pro fázovou frekvenční charakteristiku, pouze s tím rozdílem, že fázová charakteristika je díky způsobu svého výpočtu na rozdíl od modulové charakteristiky funkcí lichou.

Průběh závislosti modulu hodnot frekvenční přenosové funkce na frekvenci nazýváme modulovou frekvenční charakteristikou diskrétního systému, průběh závislosti argumentu hodnot frekvenční přenosové funkce na frekvenci nazýváme fázovou frekvenční charakteristikou. U diskrétních systémů není zvykem vykreslovat frekvenční charakteristiku v komplexní rovině.

Příklad:

Určete průběh frekvenčních charakteristik systému popsaného diferenční rovnicí

$$y(kT_{vz}) = x(kT_{vz}) + x(kT_{vz} - T_{vz}).$$

Řešení

Obrazová přenosová funkce ze zadané diferenční rovnice je

$$Y(z) = X(z) + X(z) \cdot z^{-1}$$

Z toho

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + z^{-1} = \frac{z+1}{z}.$$

Potom

$$H(e^{j\omega T_{vz}}) = 1 + e^{-j\omega T_{vz}} = \frac{e^{j\omega T_{vz}} + 1}{e^{j\omega T_{vz}}}.$$

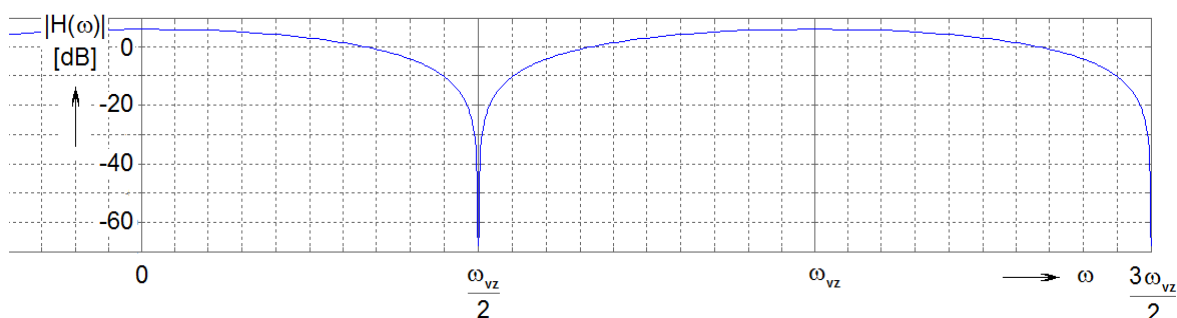
Pro $\omega = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ je modul přenosové funkce roven

$$|H(e^{j\omega T_{vz}})| = \begin{cases} |1 + e^{-j\omega T_{vz}}| = 1 + 1 = 2; \\ \frac{e^{j\omega T_{vz}} + 1}{e^{j\omega T_{vz}}} = \frac{1+1}{1} = 2. \end{cases}$$

Pro liché násobky poloviny vzorkovací frekvence je modul přenosové funkce roven

$$|H(e^{j\omega T_{vz}})| = \begin{cases} |1 + e^{-j\omega T_{vz}}| = 1 - 1 = 0; \\ \frac{e^{j\omega T_{vz}} + 1}{e^{j\omega T_{vz}}} = \frac{-1+1}{-1} = 0. \end{cases}$$

Průběh modulové frekvenční charakteristiky zadaného systému je na obr.5.1.



Obr.5.1 Modulová frekvenční charakteristika zadaného systému

□□□

5.2.5 Časové charakteristiky

Impulzní charakteristika

Budeme-li pro diskrétní systémy i nadále sledovat myšlenky odvození charakteristik lineárních systémů pracujících ve spojitém čase, pak z definičního vztahu obrazové přenosové funkce $H(z) = Y(z)/X(z)$ je pro obraz výstupní posloupnosti

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z) \quad (5.29)$$

Protože ze dřívějšíka víme (první příklad v kap.5.2.2 nebo tabulka 5.1), že obrazem Z diskrétního jednotkového skoku je $Z[\delta(k)] = 1$, je průběh odezvy systému na buzení diskrétním jednotkovým impulsem určen zpětnou transformací Z^{52} operátorové přenosové funkce

$$h(k) = Z^{-1}[H(z)]. \quad (5.30)$$

Obecně je obrazová přenosová funkce dána racionální lomenou funkcí dvou polynomů

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad (5.31)$$

Nejjednodušší způsob výpočtu impulsní odezvy systému je tehdy, když $Q(z) = 1$ nebo když podíl obou polynomů $P(z)$ a $Q(z)$ lze určit beze zbytku. Pak

$$H(z) = P(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_m z^{-m}, \quad (5.32)$$

a impulsní odezva je přímo dána hodnotami koeficientů a_i polynomu

$$h(k) = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}. \quad (5.33)$$

Protože $m < \infty$, je i posloupnost koeficientů $\{a_i\}$, $i = 0, \dots, m$, konečná a tyto systémy označujeme jako **systémy s konečnou impulzní odezvou** (KIO, v anglické literatuře *Finite Impulse Response* – FIR). Na rozdíl od opačného případu, kdy podíl obou polynomů $P(z)$ a $Q(z)$ obrazové přenosové funkce nelze určit beze zbytku. Takové systémy označujeme jako **systémy s nekonečnou impulzní odezvou** (NIO, v anglické literatuře *Infinite Impulse Response* – IIR).

Systémy s přenosovou funkcí podle vztahu (5.30) také často označujeme jako **systémy s klouzavým průměrem** (tohoto pojmu využijeme v kap.6). Tento název ale vyvolává matematicky korektní představu, že koeficienty přenosové funkce jsou koeficienty váženého průměru, jejichž součet musí být roven jedné. Tento požadavek přenesený do systémové oblasti by znamenal, že systém s takovou charakteristikou by měl jednotkové zesílení, což jednak nemusí být vždy potřeba, jednak ani žádoucí. Proto se teorie systémů staví k tomuto pojmu a z něj vyplývajícímu požadavku poněkud svobodomyšlněji.

Příklad:

Určete impulsní charakteristiku systému definovanému pomocí operátorové přenosové funkce

$$H(z) = \frac{1 - z^{-3}}{1 - z^{-1}},$$

⁵² Formálně je zpětná (inverzní) transformace Z definována vztahem

$$x(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{k-1} dz,$$

kde C je jednoduchá uzavřená a kladně orientovaná křivka ležící v oblasti konvergence a obklopující počátek. Výsledek je násoben jednotkovým skokem, aby platilo $x(k)=0$ pro $n < 0$. Pro praxi je obecný vzorec téměř nepoužitelný a inverzní transformace se určuje podobně jako v případě Laplaceovy transformace kombinací následujících způsobů :1. přímý převod; 2. dělení polynomů; 3. rozklad na parciální zlomky.

Řešení:

Diferenční rovnice systému se zadanou operátorovou přenosovou funkcí je

$$y(k) - y(k-1) = x(k) - x(k-3).$$

To znamená, že se na výpočtu výstupní posloupnosti podílí i o jeden vzorek zpožděná hodnota výstupní posloupnosti. To znamená zpětnou vazbu, která by mohla způsobit jisté obtíže při výpočtu zpětné transformace Z. Zkusme proto nejdříve, zda jsou oba polynomy dělitelné beze zbytku.

$$(1 - z^{-3}) : (1 - z^{-1}) = 1 + z^{-1} + z^{-2}.$$

To znamená, že jsou.

Můžeme tedy impulsní charakteristiku psát ve tvaru $\{1, 1, 1\}$.

□□□

Příklad:

Určete operátorovou přenosovou funkci systému s impulzní charakteristikou $h(k) = a^k$, $a \in (0, 1)$, $k \geq 0$.

Řešení:

Pro Z obraz zadané posloupnosti, tj. pro přenosovou funkci systému, je

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$$

To je nekonečná geometrická posloupnost s kvocientem az^{-1} a za uvedené podmínky pro hodnotu parametru a je její součet

$$H(z) = \frac{1}{1 - q} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}.$$

□□□

Přechodová charakteristika

Již víme, že přechodová charakteristika systému je jeho odezva na buzení jednotkovým skokem. Protože Z obraz jednotkového skoku je (tabulka 5.1)

$$Z(\sigma(k)) = \frac{z}{z-1}, \quad (5.34)$$

je pro obraz přechodové charakteristiky systému s operátorovou přenosovou funkcí $H(z)$

$$G(z) = Y(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1} \quad (5.35)$$

a pro její průběh v čase je

$$g(k) = Z^{-1}(G(z)) = Z^{-1}\left(H(z) \cdot \frac{z}{z-1}\right). \quad (5.36)$$

Srovnáním vztahů (5.30) a (5.36) vidíme, že mezi obrazy obou časových charakteristik lineárního systému pracujícího v diskrétním čase je vztah

$$G(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-1}. \quad (5.37)$$

Protože podle vztahu (5.17) odpovídá výraz $z \cdot (z-1)^{-1}$ také součtu v časové oblasti, vyplývá z toho, že mezi oběma časovými charakteristikami v časové oblasti platí

$$g(k) = \sum_{i=0}^k h(i) \quad (5.38)$$

a naopak

$$h(k) = g(k) - g(k-1). \quad (5.39)$$

5.3 Vnitřní (stavový) popis

Odlišnosti diskretních systémů (oproti spojitým) odpovídá i tvar stavového popisu vlastností systému. Dynamika není vyjádřena derivací stavových proměnných, ale jejich hodnotami v následujícím časovém kroku. To znamená, že dynamické vlastnosti systému n -tého řádu popíšeme v první stavové rovnici n diferenčními rovnicemi 1. řádu definujícími hodnoty stavových proměnných v čase $k+1$ pomocí hodnot stavových

$$\begin{bmatrix} s_1(k+1) \\ s_2(k+1) \\ \vdots \\ s_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\mathbf{s}(k+1) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}(k),$$

kde $\mathbf{s}(k+1) = (s_1(k+1), s_2(k+1), \dots, s_n(k+1))^T$ je vektor hodnot stavových veličin v čase $k+1$, $\mathbf{s}(k)$ je vektor hodnot stavových veličin v čase k a vektor $\mathbf{x}(k)$ představuje hodnoty vstupních posloupností v čase k . Matice $\mathbf{A}(n,n)$ je **matice dynamiky systému** a její (v případě lineárních, časově invariantních systémů konstantní) prvky vyjadřují vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase $k+1$ a k . Matice $\mathbf{B}(n,m)$ je tzv. **vstupní matice systému** a popisuje vzájemný vztah mezi hodnotami stavových veličin v čase $k+1$ a hodnotami vstupních veličin v čase k .

Podobně jako u spojitých systémů informací o ději uvnitř systému získáváme prostřednictvím hodnot výstupních veličin, které určujeme pomocí druhé stavové rovnice, kterou píšeme ve tvaru

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_r(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(k) \\ s_2(k) \\ \vdots \\ s_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}(k),$$

kde kromě již výše popsáných symbolů $\mathbf{y}(k) = (y_1(k), y_2(k), \dots, y_r(k))^T$ je vektor hodnot výstupních posloupností v čase k , matice $\mathbf{C}(r,n)$ matice popisující vliv stavu systému na výstup a matice $\mathbf{D}(r,m)$ je **matice přímých vstupně-výstupních vazeb**.

5.4 Stabilita

Podobně jako v kapitole 4.5.2 o stabilitě spojitých systémů se v následném soustředíme na asymptotickou stabilitu lineárních systémů, tentokrát samozřejmě pracujících s diskretním časem. Zopakujme si některé, z pohledu posouzení stability podstatné skutečnosti.

Systém je stabilní, pokud na každý ohraničený vstup reaguje rovněž ohraničeným výstupem, tzv. BIBO stabilita. Nutnou a postačující podmínkou pro tuto formu stability je již uvedený Hurwitzovo kritérium, které v diskretním tvaru je

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = V < \infty, \quad (5.42)$$

kde $h(k)$ je impulzní charakteristika systému. Vskutku, pokud platí podmínka (5.42) a současně je vstupní posloupnost ohraničená, tj.

$$|x(k)| < W < \infty, \quad (5.43)$$

pak z konvoluční sumy

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i) \cdot x(k-i),$$

je

$$|y(k)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| \cdot |x(k-i)| < W \cdot \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| = W \cdot V; \quad (5.44)$$

výstupní posloupnost je ohraničená a podmínka (5.42) je postačující. Že je to i podmínka nutná, dokažme sporem.

Předpokládejme, že Hurwitzova podmínka neplatí, tj.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |h(k)| = \infty \quad (5.45)$$

a přesto je systém stabilní. Pokusme se nyní najít takovou posloupnost, která by nesplňovala základní, výše uvedenou podmínku BIBO stability, tj. že by na ohraničený vstup systém reagoval neomezeným výstupem.

Pro vstupní posloupnost použijme

$$x(i) = \text{sign}[h(k-i)], \text{ tj. } x(k-i) = \text{sign}[h(i)], \quad (5.46)$$

potom

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)x(k-i) = \sum_{i=0}^{\infty} h(i)\text{sign}[h(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} |h(i)| = \infty. \quad (5.47)$$

Není-li Hurwitzova podmínka splněna, je systém nestabilní. Je tedy současně i podmínkou nutnou.

Podobně jako u spojitých systémů lze podmínku stability formulovat i pomocí polohy pólů operátorové přenosové funkce, která jednoznačně určuje i tvar impulzní odezvy diskrétního systému. Ukažme na základě dílčích případů, jaká je oblast, ve které se musí nacházet póly stabilního diskrétního systému. Ze vztahů uvedených v tabulce 5.1 plyne, že má-li přenosová funkce po rozkladu na parciální zlomky člen s jedním reálným pólem, obsahuje impulzní odezva $h(k)$ člen ve tvaru a^k . Tato dílčí posloupnost konverguje, pokud je $a \in (0, 1)$, $k \geq 0$ (viz též druhý příklad v kap.5.2.5. Má-li přenosová funkce parciální zlomek se dvěma komplexně sdruženými póly odpovídající komplexnímu výrazu $a \cdot e^{\pm j\omega_0}$, tj. obsahuje-li člen se jmenovatelem ve tvaru $z^2 - 2a\cos\omega_0 + a^2$, obsahuje impulzní odezva dílčí posloupnost $a^k \cos(k\omega_0)$, $k \geq 0$. Tato posloupnost opět konverguje, pokud je modul pólů $a \in (0, 1)$. Tyto dva příklady, příp. včetně případů s násobnými reálnými kořeny vedou bez důkazu k závěru, že impulzní odezva lineárního časově invariantního systému splňuje Hurwitzovu podmínku stability, jinými slovy **systém je stabilní, pokud pro moduly a_i všech pólů přenosové funkce platí $a_i \in (0, 1)$, tj. póly přenosové funkce systému leží uvnitř jednotkové kružnice v komplexní rovině z se středem v počátku souřadnicové soustavy.** Pokud póly přenosové funkce leží na jednotkové kružnici, je systém na mezi stability.

6 Základní systémové struktury

6.1 Na úvod závěrečné kapitoly

Zde bychom se mohli začít tvářit, že vše specifické o formálních modelech signálů i systémů již bylo napsáno či řečeno. (Samozřejmě to zdaleka není pravda, ve skutečnosti jsme stále jen a jen na začátku, ale v této publikaci, která představuje vytýčení úvodního směru problematikou, se tak můžeme tvářit.) Proto v této kapitole vyškrabeme na sýpce teorie signálů, časových řad a systémů a jejich aplikací ještě těch několik praktických potřebností, které mohou být užitečné k dotvoření základů problematiky, jež je náplní této publikace.

6.2 Základní formy spojování systémů

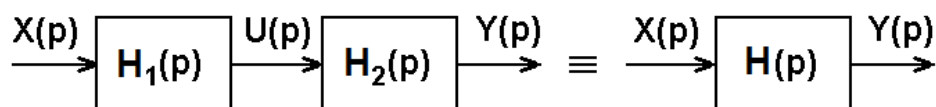
Biologické i mnohé technické systémy jsou složité systémy vysokých řádů, které lze zpravidla složit z jednodušších podsystémů. Existují tři základní typy spojení - *sériové*, *paralelní* a *zpěťnovazební*. Popis dalších složitějších soustav (např. pro účely jejich analýzy či syntézy) se určuje pomocí pravidel tzv. *blokové algebry*. Předpokladem pro použití blokové algebry jsou dvě základní podmínky:

- všechny členy systému jsou lineární;
- při vzájemném spojování se jednotlivé bloky nesmějí ovlivňovat (tj. při vzájemném spojení více bloků musí popis jednotlivých bloků zůstat nezměněn).

Z blokové algebry systémů vycházejí mnohé algoritmy, jako jsou např. metoda postupných úprav, metoda eliminace proměnných, Masonovo pravidlo, apod. Všechny tyto postupy jsou ale poněkud za horizontem očekávaných znalostí čtenářů tohoto textu, nadále se budeme zabývat pouze třemi výše uvedenými základními typy spojení dvou dílčích soustav.

Přesto, že jsou následující odvození vztahů pro různé typy zapojení provedeny pro spojitě systémy, platí též pravidla i pro systémy diskrétní.

6.2.1 Sériové (kaskádní) zapojení



Obr. 6.1 Sériové zapojení dvou lineárních systémů

Pro hledání vztahu mezi přenosovými funkcemi dvou sériově (kaskádně) zapojených lineárních dílčích systémů s přenosovými funkcemi $H_1(p)$ a $H_2(p)$ (obr. 6.1) vycházíme z platnosti vztahů

$$H_1(p) = \frac{U(p)}{X(p)}, \quad (6.1)$$

$$H_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \quad (6.2)$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (6.3)$$

Rozšířením vztahu pro $H(p)$ a následující jednoduchou úpravou dostaneme

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot \frac{U(p)}{U(p)} = \frac{U(p)}{X(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p). \quad (6.4)$$

Zobecněním vztahu (6.4) pro sériové zapojení N dílčích systémů platí

$$H(p) = \prod_{i=1}^N H_i(p). \quad (6.5)$$

Při výpočtu vztahu pro impulsní charakteristiku $h(t)$ systému daného sériovým zapojením dvou dílčích soustav s impulsními charakteristikami $h_1(t)$ a $h_2(t)$ vyjdeme ze známého základního konvolučního vztahu mezi výstupem $y(t)$ a vstupem $x(t)$ systému a jeho impulzní charakteristikou $h(t)$

$$y(t) = h(t) * x(t). \quad (6.6)$$

Ze sériového zapojení obou dílčích soustav také platí, že

$$y(t) = y_2(t) = h_2(t) * x_2(t) = h_2(t) * y_1(t) = h_2(t) * [h_1(t) * x(t)]. \quad (6.7)$$

Vzhledem k platnosti asociativního zákona pro konvoluci lze vztah (6.7) přepsat do tvaru

$$y(t) = [h_2(t) * h_1(t)] * x(t), \quad (6.8)$$

případně s využitím komutativního zákona

$$y(t) = [h_1(t) * h_2(t)] * x(t). \quad (6.9)$$

Ze srovnání (6.6) a (6.9) je pro sériové zapojení dvou lineárních soustav s impulzními charakteristikami $h_1(t)$ a $h_2(t)$

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t), \quad (6.10)$$

příp. pro zobecnění se sériovým zapojením N soustav

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) * \dots * h_N(t), \quad (6.11)$$

což je výsledek, který bylo možné očekávat, pokud víme, že Laplacovým obrazem konvoluce je součin Laplacových obrazů originálních funkcí času a naopak.

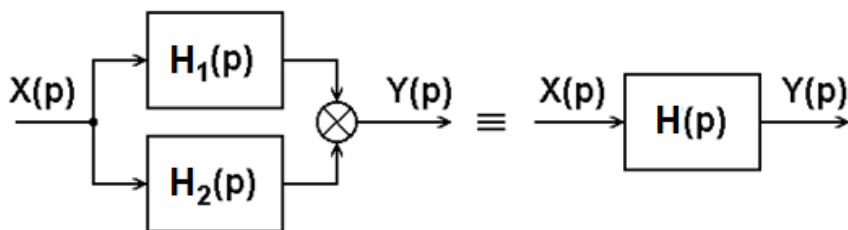
6.2.2 Paralelní zapojení

Při paralelním zapojení dvou systémů (obr.6.2) jsou vstupy obou systémů totožné a výstupy jsou obecně vázány nějak definovaným funkčním příkazem - spojkou. Má-li být výsledný systém rovněž lineární, výstupy se musí sčítat. Pokud jsou přenosové funkce jednotlivých systémů definovány vztahy

$$H_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)}, \quad (6.12)$$

$$H_2(p) = \frac{Y_2(p)}{X(p)} \quad (6.13)$$

a



Obr.6.2 Paralelní zapojení dvou lineárních systémů

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (6.14)$$

Protože $Y(p) = Y_1(p) + Y_2(p)$, platí

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = H_1(p) + H_2(p). \quad (6.15)$$

Pro obecně N paralelně zapojených systémů je

$$H(p) = \sum_{i=1}^N H_i(p). \quad (6.16)$$

Nyní se opět pokusme určit, jaký vztah platí i pro impulzní charakteristiku výsledné soustavy. Pro jednotlivé dílčí systémy je

$$y_1(t) = h_1(t) * x_1(t) = h_1(t) * x(t) \quad (6.17)$$

a

$$y_2(t) = h_2(t) * x_2(t) = h_2(t) * x(t).$$

Protože

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = h_1(t) * x(t) + h_2(t) * x(t) = [h_1(t) + h_2(t)] * x(t). \quad (6.18)$$

A podobně jako v předchozím případě srovnáním vztahů, tentokrát (6.6) a (6.18) je

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t), \quad (6.19)$$

příp. pro obecný případ paralelního zapojení N soustav

$$h(t) = \sum_{i=1}^N h_i(t). \quad (6.20)$$

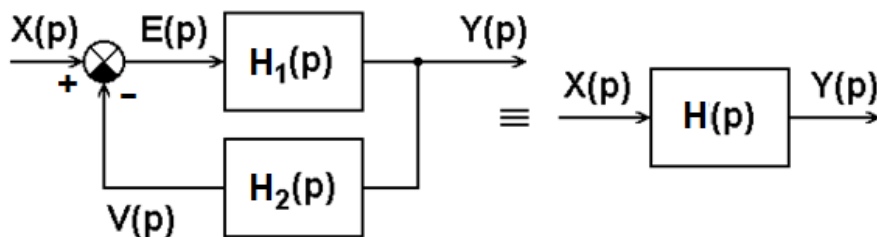
6.2.3 Zpětnovazební zapojení

Popis přenosu zpětnovazebního systému

Zpětnovazební zapojení dvou systémů je zobrazeno na obr.6.3. Systém s přenosovou funkcí $H_1(p)$ je umístěn v přímé větvi, systém $H_2(p)$ tvoří zpětnou vazbu, přičemž výstup zpětnovazebního systému $V(p)$ je buď přičítán či odečítán od vstupního signálu $X(p)$ celého systému - kladná nebo záporná zpětná vazba. Nechť jsou jednotlivé přenosové funkce definovány

$$H_1(p) = \frac{Y(p)}{E(p)}; \quad (6.21)$$

$$H_2(p) = \frac{V(p)}{Y(p)}; \quad (6.22)$$



Obr. 6.3 Zpětnovazební zapojení dvou lineárních systémů

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (6.23)$$

Dále, předpokládáme-li zápornou zpětnou vazbu, je

$$E(p) = X(p) - V(p) \quad (6.24)$$

a z toho

$$X(p) = E(p) + V(p). \quad (6.25)$$

Z těchto rovnic můžeme psát

$$\begin{aligned} H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} &= \frac{Y(p)}{E(p) + V(p)} = \frac{Y(p)}{E(p) + V(p)} \cdot \frac{\frac{1}{E(p)}}{\frac{1}{E(p)}} = \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{V(p)}{E(p)}} = \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{V(p)}{E(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y(p)}} = \\ &= \frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1 + \frac{Y(p)}{E(p)} \cdot \frac{V(p)}{Y(p)}} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)} \end{aligned} \quad (6.26)$$

V případě kladné zpětné vazby⁵³ je

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p) \cdot H_2(p)}. \quad (6.27)$$

Je-li v obou větvích zapojeno více systémů (sériově nebo paralelně), je přenosová funkce celého zapojení určena vztahem

$$H(p) = \frac{H_p(p)}{1 \mp H_s(p)}, \quad (6.28)$$

kde $H_p(p)$ reprezentuje celkovou obrazovou přenosovou funkci přímé větve a $H_s(p)$ součin celkových přenosových funkcí přímé i zpětné větve zpětnovazebního zapojení.

Určit impulsní charakteristiku zpětnovazebního zapojení ze znalosti impulzních charakteristik dílčích soustav již zdaleka není tak jednoduché jako v obou předešlých zapojeních.

Vlastnosti zpětnovazebního zapojení

Zpětnovazební zapojení má mnohé pozitivní, pro praxi užitečné vlastnosti, jako např.:

- schopnost vhodně reprodukovat vstup (princip regulace);
- snížená citlivost poměru výstup/vstup na změny parametrů systému;

⁵³ Kladná zpětná vazba nastává tehdy, pokud zvýšení hodnoty přiváděné z výstupu na vstup způsobí další zvýšení hodnoty na výstupu.

- snížený vliv nelinearit;
- snížený vliv vnějších poruch a šumu;
- širší rozsah frekvenčního pásma.

Může ale způsobit (při zavedení kladné zpětné vazby) i nepříjemné těžkosti, které vedou k možnému vzniku oscilací a nestabilitě.

Z uvedených vlastností si na příkladu demonstrováme možnost rozšíření propustného frekvenčního pásma.

Příklad:

Ověřte vliv zpětné vazby na frekvenční vlastnosti zpětnovazebního systému s úplnou zápornou zpětnou vazbou podle obr.6.4, je-li v přímé větvi systém 1. řádu s přenosovou funkcí

$$G(p) = \frac{1}{p+1} \quad (6.29)$$

Řešení:

Připomeňme, že z praktických důvodů je užitečné obrazovou přenosovou funkcí tohoto typu psát ve tvaru

$$H(p) = \frac{k}{Tp+1}, \quad (6.30)$$

kde k je koeficient zesílení (říká kolikrát je výstupní signál větší než vstupní v celém frekvenčním pásmu) a T je časová konstanta reprezentující setrvačnosti systému a která rovněž úzce souvisí s mezní frekvencí přenášeného pásma.

Frekvenční přenosová funkce zadaného systému v přímé větvi je

$$G(\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \quad (6.31)$$

a frekvenční přenosová funkce výsledného zpětnovazebního systému

$$F(\omega) = \frac{G(\omega)}{1+G(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega+1}}{1+\frac{1}{j\omega+1}} = \frac{\frac{1}{j\omega+1}}{\frac{j\omega+1+1}{j\omega+1}} = \frac{1}{j\omega+2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{0,5}{0,5j\omega+1} \quad (6.32)$$

Ze vztahu (6.33) je zřejmé, že si systém zachovává globální vlastnosti - opět se jedná o systém 1. řádu se setrvačností, zmenšil se ale koeficient zesílení z 1 na 0,5 a podobně se zmenšila i časová konstanta systému, opět z 1 na 0,5.

Bodeho modulová frekvenční charakteristika systému 1. řádu se setrvačností je určena vztahem

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log |H(\omega)| = 20 \log k - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (6.33)$$

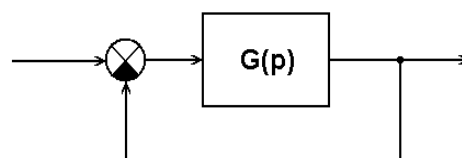
Zopakujme si rovněž, že grafické znázornění Bodeho frekvenční charakteristiky je založeno na aproximaci lomenou přímkou pro dva mezní případy:

- pro $\omega \ll 1/T$ je $(T\omega)^2 \ll 1$ a tedy

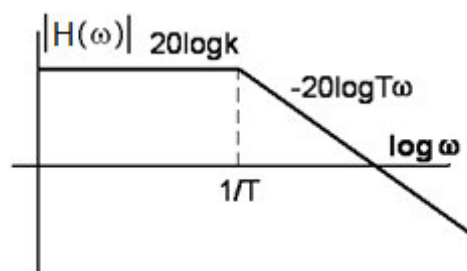
$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log k \quad (6.34)$$

- pro $\omega \gg 1/T$ je $(T\omega)^2 \gg 1$ a tedy

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \log k - 20 \log T\omega \quad (6.35)$$



Obr.6.4 Systém 1. řádu se setrvačností s úplnou zpětnou vazbou



Obr.6.5 Modulová Bodeho charakteristika systému 1. řádu se setrvačností

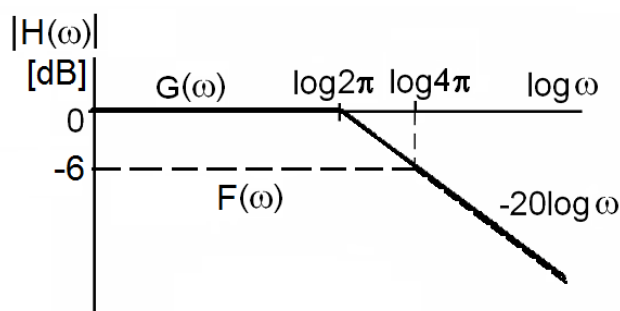
Modulová Bodeho frekvenční charakteristika systému 1. řádu se setrvačností má proto tvar uvedený na obr.6.5.

V zadaném případě má zpětnovazební zapojení v propustném pásmu poloviční zesílení, tedy nikoliv $20\log 1 = 0$ dB jako původní zadaná soustava, ale $20\log(1/2)$, tj. $-20\log 2 \approx -6$ dB. Ve svých klesajících částech jsou frekvenční charakteristiky obou systémů popsány výrazy

$$\begin{aligned} G(\omega)|_{dB} &= 20\log 1 - 20\log \omega = -20\log \omega; \\ F(\omega)|_{dB} &= 20\log \frac{1}{2} - 20\log \frac{\omega}{2} = 20\log 1 - 20\log 2 - 20\log \omega + 20\log 2 = \\ &= 20\log 1 - 20\log \omega = -20\log \omega. \end{aligned} \quad (6.36)$$

To znamená, že jejich průběh je v této části stejný. Tvar frekvenčních charakteristik obou soustav je zobrazen na obr.6.6.

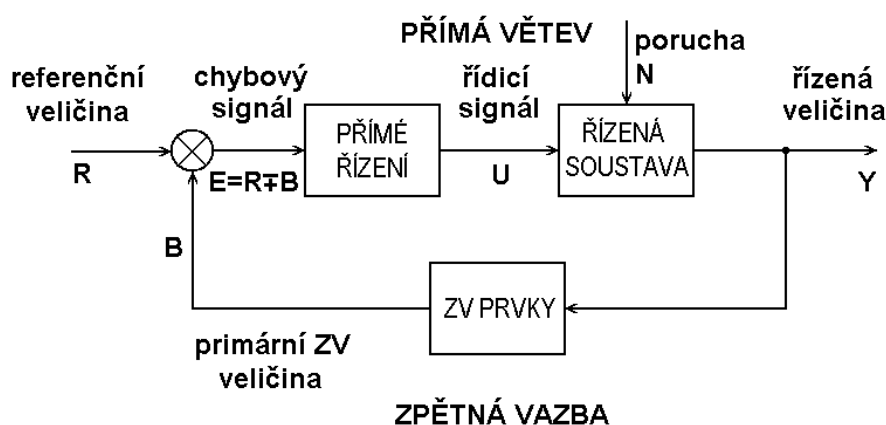
Frekvenční charakteristika zpětnovazebního systému má oproti původnímu dvojnásobně široké přenášené pásmo, ovšem za cenu snížení zesílení na polovinu. □□□



Obr.6.6 Modulová Bodeho charakteristika systému 1. řádu se setrvačností dle zadání

Princip zpětnovazební regulace

Struktura zpětnovazebního regulačního systému zahrnuje některé typické podsystémy s přesně definovanou úlohou. Základní kon-



Obr.6.7 Princip zpětnovazební regulace

figurace takového jednoduchého zpětnovazebního systému s jedním vstupem a jedním výstupem (*Single Input - Single Output*, SISO) je uveden na obr.6.7.

Referenční veličina R je externí signál, jehož hodnota je srovnávána se signálem na výstupu zpětnovazební větve B . Referenční veličina zpravidla představuje ideální či požadovanou hodnotu řízené veličiny. Hodnota chybového signálu je dána rozdílem referenční a zpětnovazební veličiny a tento rozdíl představuje hybnou akční veličinu systému. Je-li chybový signál nulový, znamená to, že řízená veličina má požadovanou hodnotu a není třeba zasahovat. Je-li naopak chybový signál velký, je potřeba vyvolat intenzivní akci, která uvede řízenou veličinu do požadovaných mezí. Blok přímého řízení představuje část systému, která transformuje chybový signál na akční řídicí signál, který již přímo ovlivňuje chování řízené soustavy, která může být (konečně jako každý jiný prvek schématu) ovlivněna nežádoucím působením vnějšího prostředí - poruchami. Blok zpětnovazebních prvků transformuje řízenou výstupní veličinu do tvaru, který může být použit pro srovnání s referenčním vstupem.

6.3 Základní typy systémů pracujících ve spojitém čase

Téměř všechny fyzikálně realizovatelné spojitě lineární systémy (kromě systémů s dopravním zpožděním) lze vytvořit pomocí tří typů operací:

- násobením konstantou (tzv. ideálních zesilovačů);
- integrací;
- součtovými členy (sumátory).

Zatímco první dva členy jsou unární, tj. mají jeden vstup a jeden výstup a integrátor má i dynamické vlastnosti, má součtový člen více vstupů a jeden výstup a podobně jako proporcionální člen má přenosové vlastnosti konstantní bez ohledu na frekvenční obsah zpracovávaných funkcí.

Příklad:

Určete realizační schéma systému popsaného diferenciální rovnicí

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t), \quad (6.37)$$

Řešení:

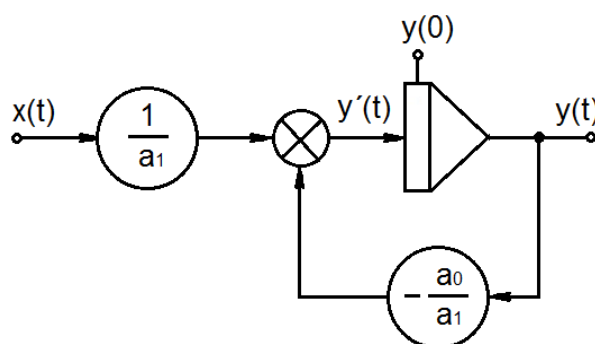
Převedme zadanou diferenciální rovnici do tvaru

$$a_1 y'(t) = x(t) - a_0 y(t) \quad (6.38)$$

a dále

$$y'(t) = \frac{1}{a_1} x(t) - \frac{a_0}{a_1} y(t) \quad (6.39)$$

Tato rovnice znamená, že derivace výstupní proměnné (její hodnotu dostaneme, když derivaci $y'(t)$ integrujeme) je rovna rozdílu váhovaných hodnot vstupní a výstupní veličiny. Realizační schéma proto vypadá tak, jak je zobrazeno na obr.6.8. Z tohoto schématu vyplývá, že byly opravdu použity členy tří typů - násobení konstantou (proporcionální člen), integrátor a součtový člen. □



Obr.6.8 Realizační schéma systému podle rov.(6.37)

Z uvedených tří základních realizačních prvků lze vytvořit základní členy se specifickými typovými vlastnostmi. Jsou to zejména:

- systém se setrvačností 1. řádu;
- derivační systém;
- statický systém 2. řádu;
- systém s dopravním zpožděním.

6.3.1 Proporcionální člen

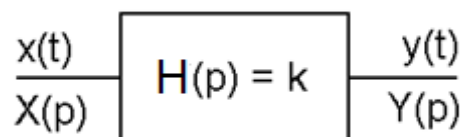
Proporcionální člen (obr.6.9) je určen rovnicí

$$y(t) = k \cdot x(t). \quad (6.40)$$

Z definiční rovnice plyne, že obrazová přenosová funkce je definována vztahem

$$F(p) = Y(p)/X(p) = k \quad (6.41)$$

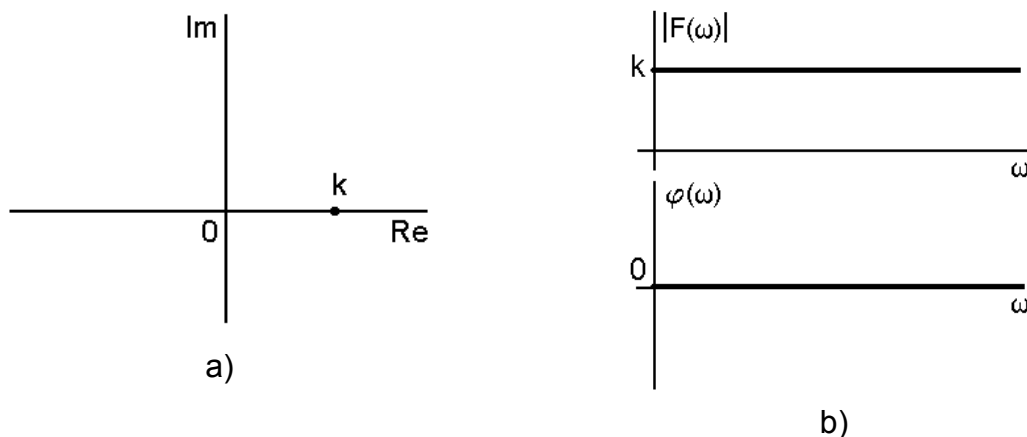
a frekvenční přenosová funkce



Obr.6.9 Proporcionální člen

$$H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega) = k. \quad (6.42)$$

Frekvenční přenosová funkce tedy není závislá na frekvenci, frekvenční charakteristiky jsou zobrazeny na obr.6.10.



Obr.6.10 Frekvenční charakteristiky proporcionálního členu - a) v komplexní rovině; b) modulová a fázová frekvenční charakteristika

Další způsoby popisu proporcionálního členu:

- impulsní charakteristika: Diracův impuls s mocností k - $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(p)\} = k_i \delta(t)$;
- přechodová charakteristika: skoková funkce s výškou skoku k;
- nuly a póly přenosové funkce - neexistují.

6.3.2 Integrační člen

Chování integračního členu určuje diferenciální rovnice

$$y'(t) = k_i \cdot x(t) \quad (6.43)$$

která přechází po Laplacově transformaci do tvaru

$$p \cdot Y(p) - y(0) = k_i \cdot X(p) \quad (6.44)$$

a z toho je obrazová přenosová funkce (za předpokladu nulové počáteční podmínky - $y(0) = 0$)

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k_i}{p} = \frac{1}{T_i \cdot p} \quad (6.45)$$

kde k_i nazýváme zesílení a T_i je časová konstanta integrátoru.

Frekvenční přenosová funkce je

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{k_i}{j\omega} = -j \frac{k_i}{\omega} \quad (6.46)$$

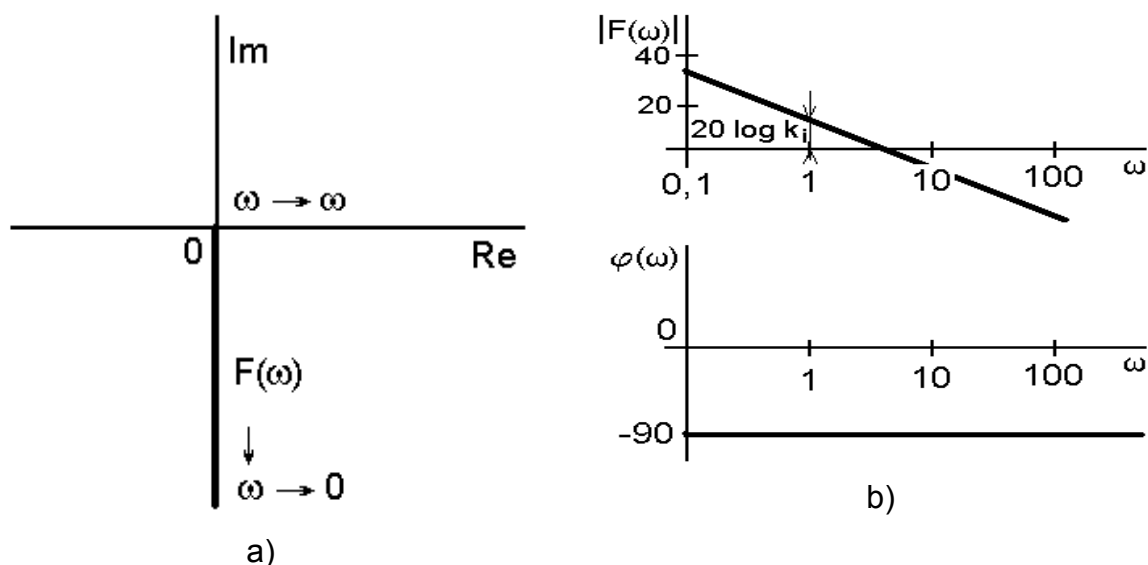
a tedy frekvenční charakteristiky mají průběh, jak je zobrazeno na obr. 6.11. Bodeho logaritmická modulová charakteristika je vyjádřena rovnicí

$$|H(\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log|H(\omega)| = 20 \log k_i - 20 \log \omega \quad (6.47)$$

Tato funkce má tedy v logaritmických souřadnicích přímkový průběh, s frekvencí klesá (záporný druhý člen) se sklonem 20 dB na dekádu a pro úhlový kmitočet $\omega = 1$ nabývá hodnoty $20 \log k_i$.

Impulsní charakteristika je popsána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = k_i \cdot \sigma(t), \quad (6.48)$$



Obr.6.11 Frekvenční charakteristiky integračního členu - a) v komplexní rovině; b) modulová a fázová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích

má tedy tvar skokové funkce o výšce k_i a přechodová charakteristika

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ F(p) \cdot \frac{1}{p} \right\} = k_i \cdot t = \frac{1}{T_i} \cdot t \quad (6.49)$$

je lineárně rostoucí funkce se směrnici rovnou převrácené hodnotě časové konstanty integrátoru.

6.3.3 Systém 1. řádu se setrvačností

Systém tohoto typu nazýváme též zpožďující člen 1. řádu, aperiodický člen, případně statický člen 1. řádu.

Definiční diferenciální rovnice je

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t), \quad (6.50)$$

případně označíme-li

$$T = a_1/a_0; \quad k = 1/a_0, \quad (6.51)$$

kde T je časová konstanta a k zesílení systému, nabývá diferenciální rovnice tvaru

$$T \cdot y'(t) + y(t) = k \cdot x(t). \quad (6.52)$$

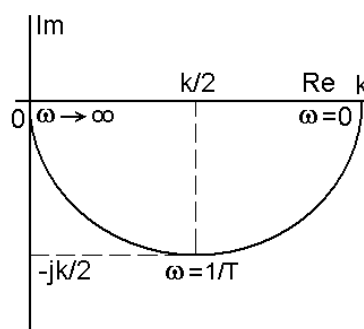
Obrazová přenosová funkce je za předpokladu nulové počáteční podmínky

$$H(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1} \quad (6.53)$$

(kdo si pamatuje ví, že stejné zapojení bylo použito v příkladu v kap.6.2.3 o zpětnovazebním zapojení) a frekvenční přenosová funkce

$$H(j\omega) = \frac{k}{j\omega T + 1}. \quad (6.54)$$

Z toho plyne, že její reálná a imaginární část jsou



Obr.6.12 Frekvenční charakteristika systému 1. řádu se setrvačností v komplexní rovině

$$\operatorname{Re}(H(\omega)) = \frac{k}{\omega^2 T^2 + 1} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}(H(\omega)) = \frac{-\omega T k}{\omega^2 T^2 + 1}. \quad (6.55)$$

a frekvenční charakteristika v komplexní rovině má tvar půlkružnice ve 4. kvadrantu komplexní roviny (obr.6.12).

Modulová logaritmická (Bodeho) frekvenční charakteristika je dána výrazem

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |H(\omega)| = 20 \log k - 20 \log \sqrt{T^2 \omega^2 + 1}. \quad (6.56)$$

který aproximujeme lomenou přímkou s bodem zlomu pro $\omega = 1/T$. Pro $\omega \ll 1/T$ je $(T\omega)^2 \ll 1$ a tedy

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log k \quad (6.57)$$

má konstantní hodnotu bez ohledu na kmitočet.

Naopak, pro $\omega \gg 1/T$ je $(T\omega)^2 \gg 1$ a tedy

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log k - 20 \log T\omega \quad (6.58)$$

je klesající přímka se sklonem 20 dB/dek.

Fázová frekvenční charakteristika je dána vztahem

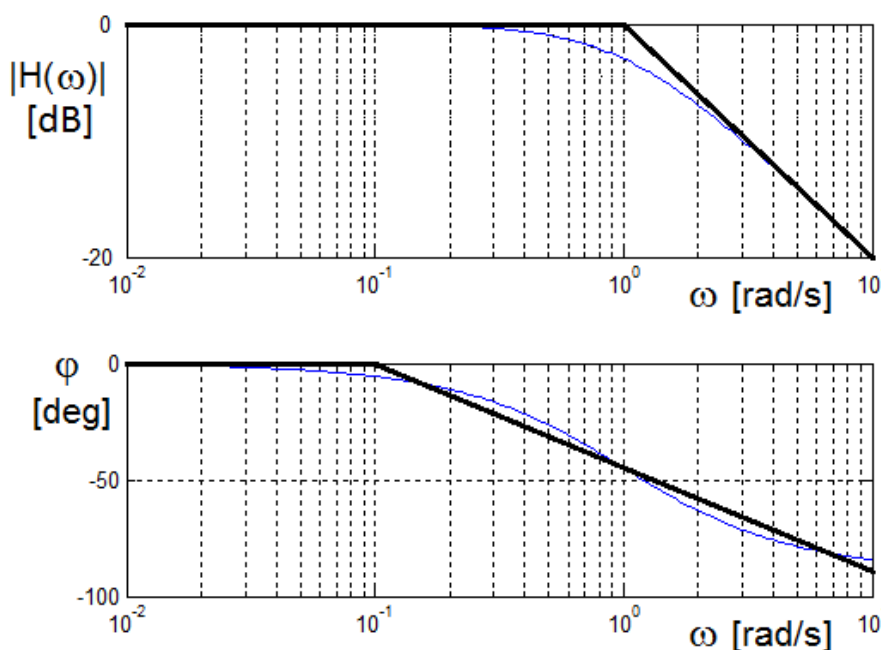
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\operatorname{Im}(H(\omega))}{\operatorname{Re}(H(\omega))} = \arctg(-\omega T) = -\arctg(\omega T) \quad (6.59)$$

v rozsahu od 0 do -90° pro $0 \leq \omega < \infty$, jak plyne i z frekvenční charakteristiky v komplexní rovině (obr.6.12).

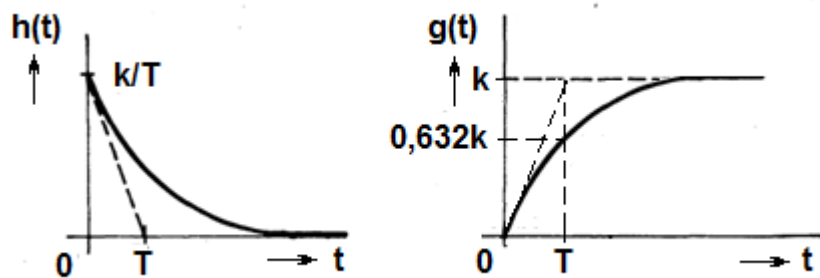
Průběh obou Bodeho frekvenčních charakteristik je na obr.6.13.

Impulsní charakteristika je dána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k}{Tp+1}\right\} = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T} \quad (6.60)$$



Obr.6.13 Bodeho frekvenční charakteristiky systému 1. řádu se setrvačností



Obr.6.14 Impulsní a přechodová charakteristika systému 1. řádu se setvačností
a přechodová charakteristika vztahem

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{p} \cdot F(p) \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{p(Tp+1)} \right\} = k \cdot (1 - e^{-t/T}). \quad (6.61)$$

Jejich průběhy jsou na obr. 6.14.

6.3.4 Derivační člen

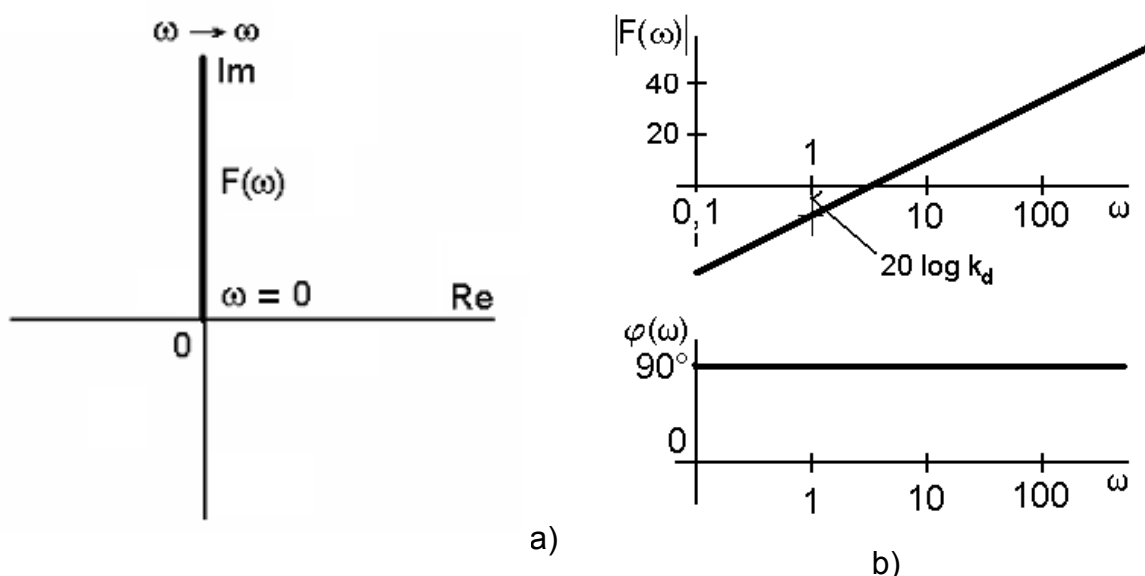
Definiční diferenciální rovnice derivačního členu má tvar

$$y(t) = k_d \cdot x'(t) \quad (6.62)$$

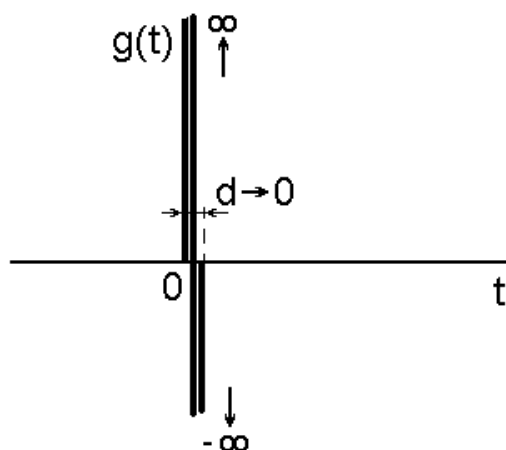
a jeho obrazová přenosová funkce

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = k_d p. \quad (6.63)$$

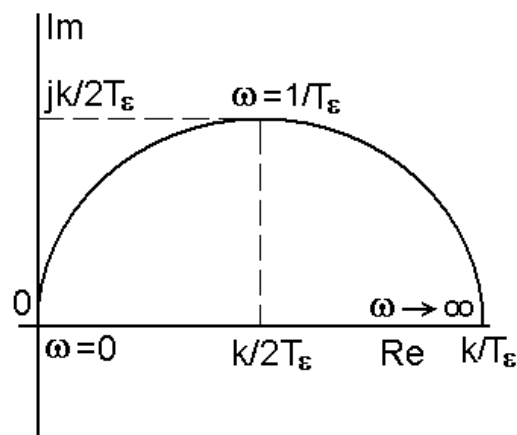
To znamená, že má jednu nulu v počátku komplexní roviny. Tato přenosová funkce je v konfliktu s dříve vysloveným předpokladem, že řád čitatele racionální lomené přenosové funkce musí být menší či maximálně roven řádu jmenovatele. V tomto případě je řád čitatele roven 1, řád jmenovatele je nulový. Znamená to, že jestliže se vstup změní skokem, měl by být výstup úměrný Diracovu impulsu, což neumíme realizovat (nekonečně vysoký impuls s nekonečně krátkou dobou trvání).



Obr.6.15 Frekvenční charakteristika v komplexní rovině a Bodeho frekvenční charakteristika ideálního derivačního členu.



Obr. 6.16 Impulsní odezva ideálního derivačního systému



Obr. 6.17 Frekvenční charakteristika reálného derivačního članku v komplexní rovině

Frekvenční přenosová funkce je

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = j\omega k_d. \quad (6.64)$$

To znamená, že průběh frekvenční charakteristiky v komplexní rovině je totožný s kladnou imaginární osou, jak je znázorněno na obr. 6.15.

Modulová logaritmická frekvenční charakteristika je určena funkcí

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log|H(\omega)| = 20 \log k_d + 20 \log \omega. \quad (6.65)$$

To znamená, že v logaritmických souřadnicích má tato funkce tvar přímky s kladnou směrnici 20 dB/dek. Fázová charakteristika je nezávislá na frekvenci a nabývá hodnoty 90°.

Impulsní charakteristika je určena vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{k_d \cdot p\}. \quad (6.66)$$

a přechodová charakteristika

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} k_d \cdot p\right\} = k_d. \quad (6.67)$$

Tedy impulsní charakteristika má tvar tzv. Diracova impulsu 2. řádu (nekonečně vysokého a nekonečně krátkého impulsu, který nabývá obou polarit - obr. 6.16) a přechodová charakteristika tvar Diracova impulsu s mocností k_d .

6.3.5 Reálný derivační systém

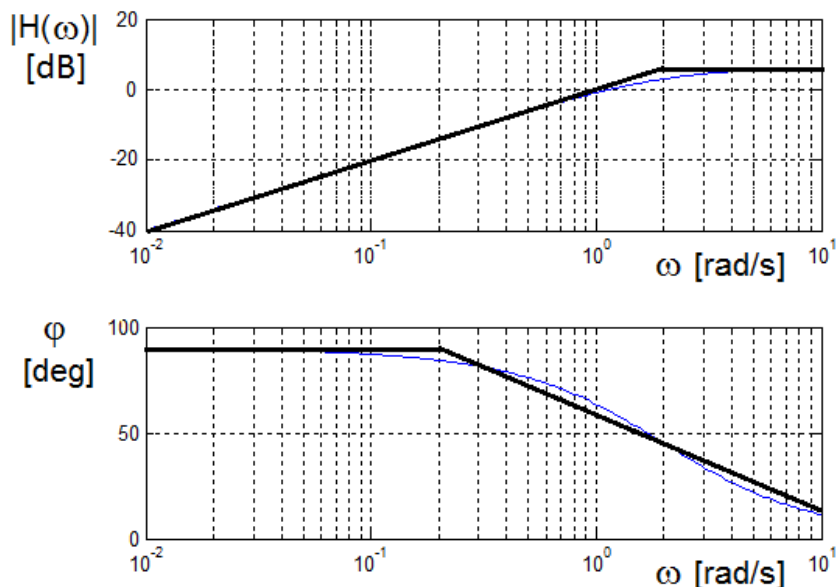
Každý reálný derivační článek je zatížen určitou setrvačností, proto jeho přenosová funkce je alespoň ve tvaru

$$H(p) = \frac{k_d \cdot p}{T_\varepsilon \cdot p + 1}, \quad (6.68)$$

kde T_ε je malá časová konstanta.

Jeho frekvenční charakteristika je popsána vztahem

$$H(\omega) = \frac{k_d \cdot j\omega}{T_\varepsilon \cdot j\omega + 1}, \quad (6.69)$$



Obr.6.18 Modulová a fázová Bodeho frekvenční charakteristika reálného derivačního članku pro $k_d = 1$, $T_\varepsilon = 0,5$ s

a její průběh v komplexní rovině má tvar podle obr.6.17.

Modulová frekvenční charakteristika v logaritmických souřadnicích je popsána vztahem

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \cdot \log |H(\omega)| = 20 \log k_d + 20 \log \omega - 20 \log \sqrt{\omega^2 T_\varepsilon^2 + 1}, \quad (6.70)$$

který aproximujeme lomenou přímkou s bodem zlomu pro $\omega = 1/T_\varepsilon$. Pro $\omega \ll 1/T_\varepsilon$ je

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(k_d) + 20 \log(\omega) \quad (6.71)$$

a pro $\omega \gg 1/T_\varepsilon$ je

$$|H(\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log(k_d) + 20 \log(\omega) - 20 \log(T_\varepsilon). \quad (6.72)$$

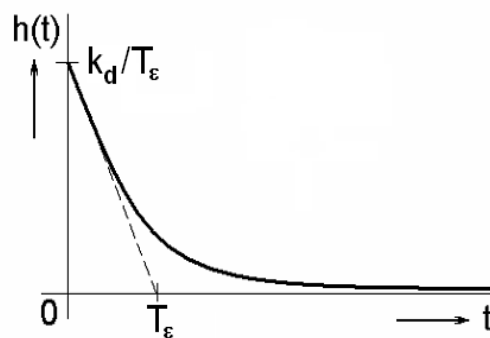
Tomu odpovídá průběh (včetně fázové charakteristiky) zobrazený na obr.6.18.

Impulsní charakteristika tohoto systému je popsána vztahem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_d \cdot p}{T_\varepsilon p + 1}\right\} \quad (6.73)$$

a přechodová charakteristika vztahem (obr.6.19)

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p} F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{k_d}{T_\varepsilon p + 1}\right\} = \frac{k_d}{T_\varepsilon} e^{-t/T_\varepsilon} \quad (6.74)$$



Obr.6.19 Přechodová charakteristika reálného derivačního članku

6.3.6 Statický systém 2. řádu

Tento systém je popsán diferenciální rovnicí ve tvaru

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = x(t), \quad (6.75)$$

čemuž odpovídá obrazová přenosová funkce ve tvaru

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} \quad (6.76)$$

nebo

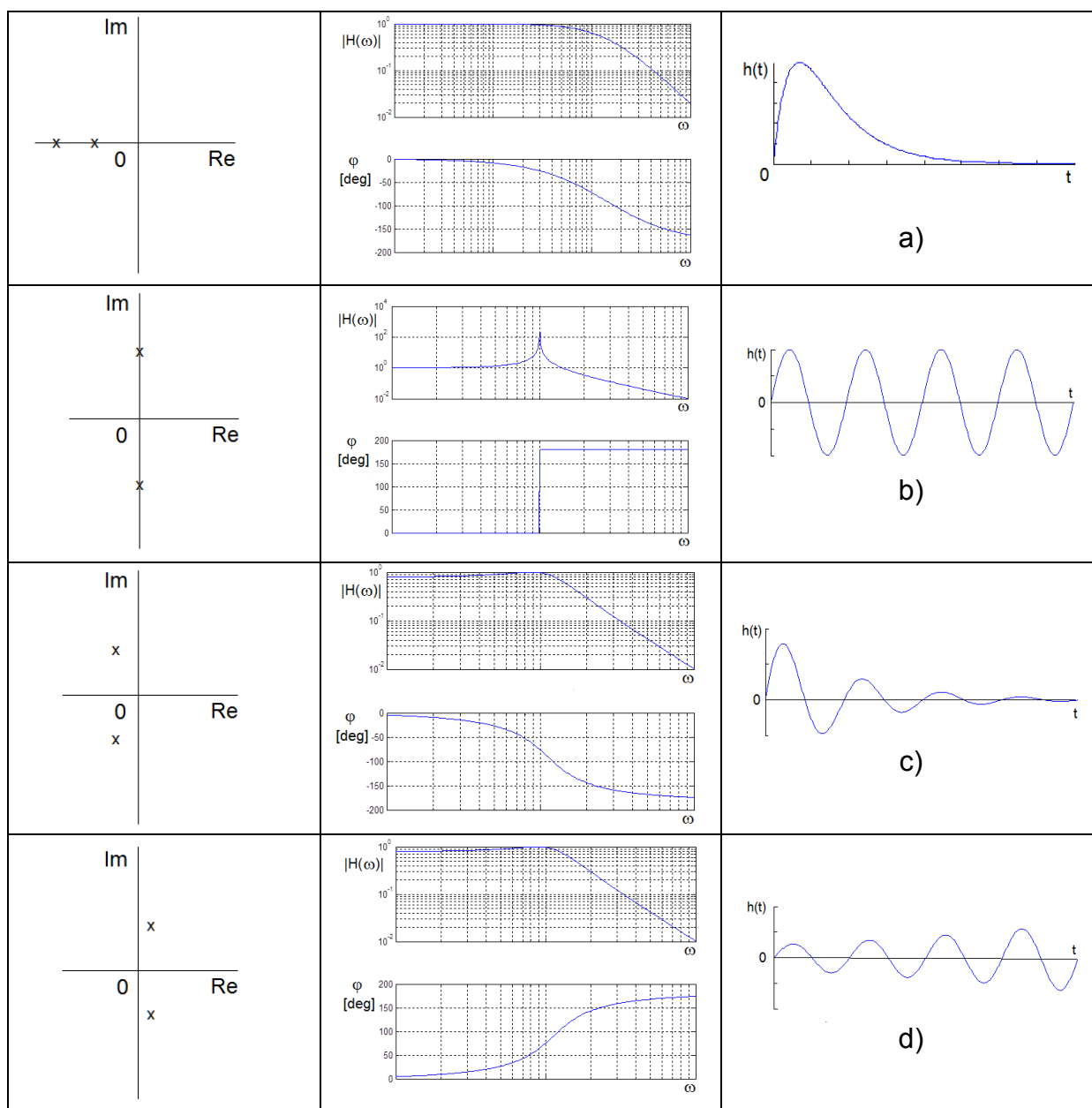
$$H(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2T\xi p + 1}, \quad (6.77)$$

kde $k = 1/a_0$ je zesílení systému, $T = \sqrt{a_2/a_0}$ je jeho časová konstanta a $\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$ je jeho

tzv. poměrné tlumení.

Přenosová funkce systému má dva póly a tvar jeho charakteristik i jeho chování závisí především na pozicích pólů přenosové funkce, přičemž rozlišujeme situace, kdy jsou oba póly reálné, resp. komplexně sdružené.

Frekvenční charakteristiky a typické tvary impulzových odezev statických systémů 2. řádu



Obr. 6.20 Charakteristiky a tvary přirozených odezev statického systému 2. řádu pro některé konfigurace pólů přenosové funkce

podle rozmístění pólů přenosové funkce jsou na obr.6.20. V prvním řádku tabulky jsou uvedeny charakteristiky stabilního systému se dvěma různými reálnými póly. Systém má charakter dolní propusti, impulsní charakteristika neobsahuje žádnou kmitavou složku (imaginární složka pólů je nulová), v podstatě odpovídá pouze snížení hodnoty jednotkového impulzu a roztažení v čase. Druhý řádek zobrazuje charakteristiky systému se dvěma ryze imaginárními, komplexně sdruženými póly. Je tím pádem na mezi stability a jeho impulzní odezva má tvar ani netlumeného, ani nezesilovaného harmonického průběhu. Tomu odpovídá i modulová frekvenční charakteristika, která má rezonanční extrém právě na frekvenci dané hodnotou imaginární složky. Fázová charakteristika má na této frekvenci skokovou změnu o 180° . Poslední dva řádky zobrazují vlastnosti systému se dvěma komplexně sdruženými póly, v prvním případě ležícími v levé komplexní polorovině, tzn. systém je stabilní. V druhém případě jsou póly v pravé komplexní polorovině, což představuje systém nestabilní. Protože jak reálné tak i imaginární složky obou pólů jsou nenulové, mají impulzní odezvy kmitavý harmonický průběh. U prvního, stabilního systému zatlučený, v druhém případě se výchylky kmitů s časem zvětšují. Pokud by póly měly nejen tytéž imaginární hodnoty, ale byly by umístěny symetricky vůči imaginární ose, měly by oba systémy tentýž průběh modulových frekvenčních charakteristik (z průběhu modulových charakteristik nestabilitu není možné poznat), ale fázovou charakteristiku mají s opačnou polaritou.

6.3.7 Zpožďovací člen

Zpožďovací člen pouze způsobuje posunutí vstupní funkce v čase. Jinak se jeho časový průběh nemění. Definiční rovnice proto není diferenciální, má tvar

$$y(t) = x(t - t_0). \quad (6.78)$$

Protože člen realizuje pouze posun v čase, je jeho obrazová přenosová funkce

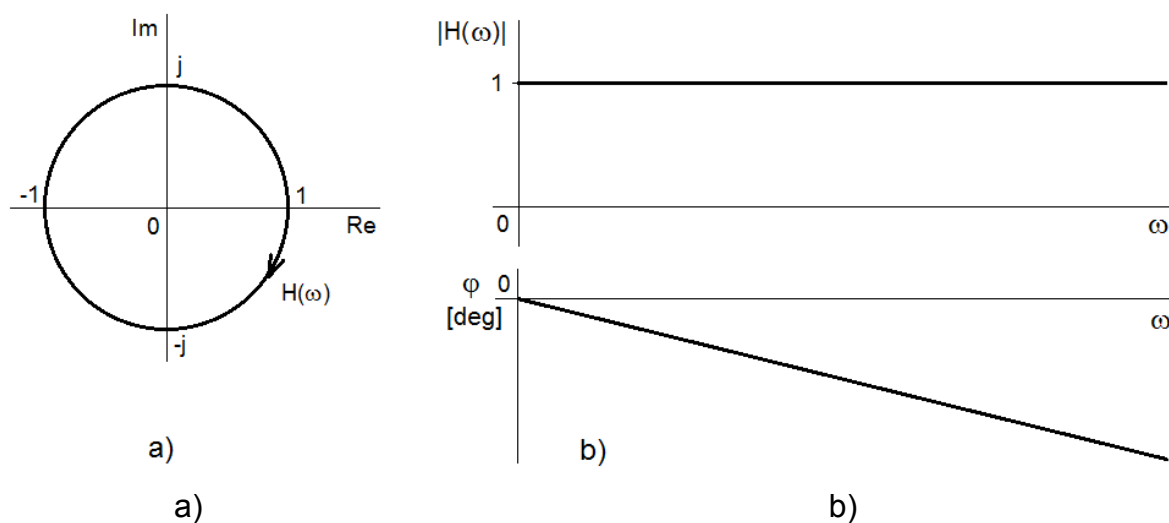
$$H(p) = e^{-t_0 p}, \quad (6.79)$$

což není racionální lomená funkce a tudíž formálně nemá ani nulové body, ani póly.

Z přenosové funkce je frekvenční charakteristika (obr.6.21)

$$H(\omega) = e^{-j t_0 \omega}. \quad (6.80)$$

To znamená, že její modul je jednotkový ($|H(\omega)| = 1$), fáze se mění lineárně s frekvencí ($\varphi(\omega) = -t_0 \omega$), směrnice fázové charakteristiky je určena velikostí zpoždění.



Obr.6.21 Frekvenční charakteristiky zpožďovacího členu – a) v komplexní rovině; b) modulová a fázová charakteristika

6.4 Základní typy systémů pracujících v diskrétním čase

Podobně jako spojité systémy, lze lineární systémy pracující v diskrétním čase realizovat pomocí tří základních, i když od spojitých systémů obecně odlišných, členů:

- proporcionálního členu, tj. násobení konstantou;
- zpožďovacího členu;
- sumačního (součtového) členu.

Příklad:

Určete realizační schéma systému popsaného diferenční rovnicí

$$a_1 y(kT_{vz}) + a_0 y(kT_{vz} - T_{vz}) = b_0 x(kT_{vz}), \quad (6.81)$$

resp. zkráceně

$$a_1 y(k) + a_0 y(k-1) = b_0 x(k).$$

Řešení:

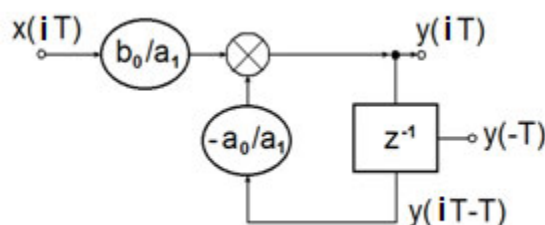
Převedme zadanou rovnici do tvaru

$$a_1 y(k) = b_0 x(k) - a_0 y(k-1). \quad (6.82)$$

a následně

$$y(k) = \frac{b_0}{a_1} x(k) - \frac{a_0}{a_1} y(k-1). \quad (6.83)$$

Příslušné realizační blokové schéma pak je na obr.6.22.



Obr.6.22 Realizační schéma podle diferenční rovnice (6.81)

6.4.1 Proporcionální člen

Podobně jako v případě systémů pracujících ve spojitém čase je průběh výstupní posloupnosti proporcionálního členu tvarově shodný se vstupem, poměr všech hodnot výstupní a vstupní posloupnosti je roven „zesílení“ a . To znamená, že definiční rovnice je ve tvaru

$$y(kT_{vz}) = a \cdot x(kT_{vz}), \text{ resp. } y(k) = a \cdot x(k). \quad (6.84)$$

Obrazová přenosová funkce je pak určena vztahem

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = a. \quad (6.85)$$

6.4.2 Zpožďovací člen

Na rozdíl od spojitého času je zpožďovací člen u diskretních systémů (obr.6.23) popisovaných nikoliv diferenčními, nýbrž diferenčními rovnicemi, jedním ze základních výpočetních členů.

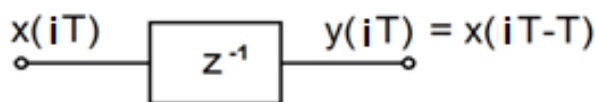
Je popsán diferenční rovnicí

$$y(kT_{vz}) = x(kT_{vz} - T_{vz}), \text{ resp. } y(k) = x(k-1). \quad (6.86)$$

Ze vztahu pro Z obraz v čase posunuté kauzální posloupnosti odpovídá definiční diferenční rovnici

$$Y(z) = X(z) \cdot z^{-1} \quad (6.87)$$

a z toho pro obrazovou přenosovou funkci je



Obr.6.23 Schéma diskretního zpožďovacího členu

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = z^{-1} = \frac{1}{z}. \quad (6.88)$$

Frekvenční přenosovou funkci získáme po substituci $z = e^{j\omega T_{vz}}$ do výrazu (6.88) pro $H(z)$, máme tak

$$H(\omega) = H(e^{j\omega T_{vz}}) = e^{-j\omega T_{vz}} \quad (6.89)$$

a pro normalizovanou vzorkovací frekvenci

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}. \quad (6.90)$$

Srovnáme-li vztah (6.89) se vztahem (6.80) pro spojitý případ, vidíme, že oba vztahy jsou ekvivalentní, pokud je zpoždění $t_0 = T_{vz}$.

6.4.3 Základní struktury systémů s diskrétním časem

Vzhledem k odlišnému výpočetnímu aparátu potřebnému pro výpočet výstupní posloupnosti diskrétních systémů (oproti systémům spojitým) je i poněkud odlišná kategorizace jejich základních struktur.

Jako základní kritérium je považován tvar obrazové přenosové funkce. Podle něj dělíme diskrétní systémy na:

- **systémy s klouzavým průměrem** (MA – *moving average*), jejichž přenosová funkce má tvar

$$H_{MA}(z) = \frac{Q(z)}{1} = Q(z), \quad (6.91)$$

kde $Q(z)$ je polynom komplexní proměnné z ; z přenosové funkce plyne, že diferenční rovnice těchto systémů je

$$y(k) = a_0x(k) + a_1x(k-1) + \dots + a_Nx(k-m), \quad (6.92)$$

- **systémy autoregresivní**⁵⁴ (AR) s přenosovou funkcí ve tvaru

$$H_{AR}(z) = \frac{1}{P(z)}, \quad (6.93)$$

kde $P(z)$ je opět polynom komplexní proměnné z ;

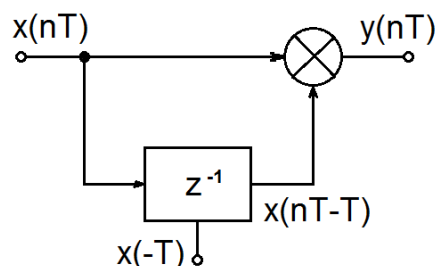
- **systémy autoregresivní s klouzavým průměrem** (ARMA), již mají přenosovou funkci v nejobecnějším tvaru

$$H_{ARMA}(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}. \quad (6.94)$$

⁵⁴ **Regrese** (lat. *regressus*, od *regredior*, ustupuji) vyjadřuje zpětný pohyb, ústup, návrat; odtud regresivní, ustupující. V tomto případě je názvu autoregresivní použito, protože k výpočtu výstupního vzorku v čase n přispívají kromě vstupního vzorku v tomtéž čase pouze zpožděné hodnoty výstupu (jak ostatně plyne z diferenční rovnice uvedené v textu). Kromě tohoto specifického použití se pojmu regrese používá i v mnoha jiných odborných disciplínách, jako např. v *psychologii* (návrat k dřívějšímu méně dospělému způsobu chování), medicíně (zmírnění, resp. ústup příznaků nemoci), v *biologii* (návrat populace k dřívějším typům v následných generacích), ve statistice (vztah mezi střední hodnotou náhodné proměnné a odpovídajícími hodnotami jedné nebo více nezávislých proměnných), v *astronomii* (zpětný pohyb tělesa na obloze), ...

Teoreticky lze systémy splňující požadavky na vlastnosti určitého systému podle Woldova⁵⁵ dekompozičního teorému realizovat kterýmkoliv z uvedených typů systémových struktur. Je to jen otázka složitosti, resp. řádu systému. Podle Woldova teorému platí, že:

- jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR systémem (modelem), maximálně ∞ řádu;
- jakýkoliv ARMA nebo AR proces může být reprezentován MA systémem (modelem) maximálně ∞ řádu.



Obr. 6.24 Realizační výpočetní schéma sumačního členu 1. řádu s počáteční podmínkou u zpožďovacího členu.

6.4.4 Systémy s klouzavým průměrem

Sumační člen 1. řádu s konstantními koeficienty

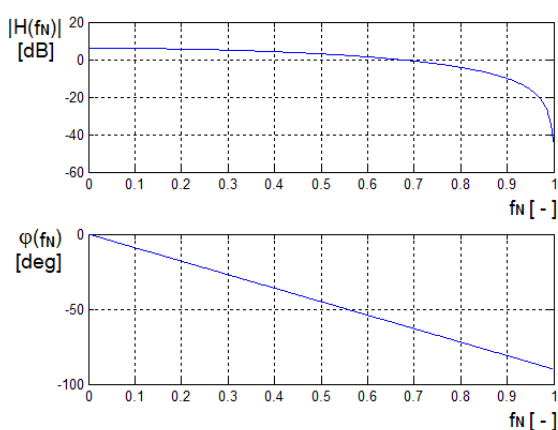
Je základním systémem s klouzavým průměrem. Jeho definiční diferenční rovnice je

$$y(k) = x(k) + x(k-1) \quad (6.95)$$

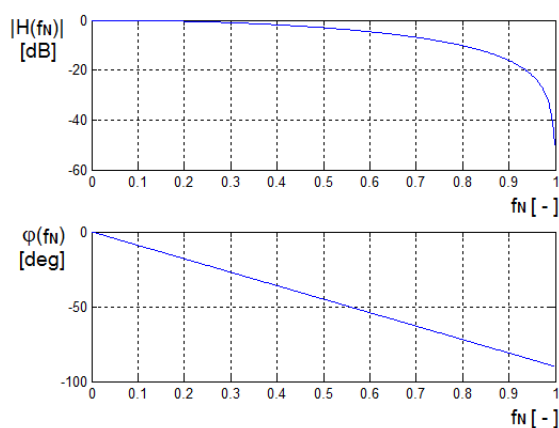
realizovaná pomocí výpočetního schématu na obr.6.24. Obrazovou přenosovou funkcí má ve tvaru

$$H(z) = 1 + z^{-1} = 1 + \frac{1}{z} = \frac{1+z}{z} \quad (6.96)$$

a jeho modulová frekvenční charakteristika v normalizovaném frekvenčním pásmu $\langle 0, 1 \rangle$ vůči polovině vzorkovací frekvence je na obr.6.25a. Ze zobrazené charakteristiky je zřejmé, že systém tak jak je definován, nemá jednotkové zesílení na nulové frekvenci. Abychom toho dosáhli, je třeba ctít požadavek výpočtu průměru, tj. každý člen součtu musí být násoben vahou odpovídající převrácené hodnotě počtu členů v součtu. V našem případě to znamená, že diferenční rovnice musí mít tvar



a)



b)

Obr. 6.25 Frekvenční charakteristiky sumačního členu 1. řádu s konstantními koeficienty – a) se zesílením 2; b) se zesílením 1 na nulové frekvenci

⁵⁵ **Herman Ole Andreas Wold** (*1908, Skien, Norsko, +1992, Švédsko) byl švédský matematik a statistik profilující se zejména v oblasti analýzy časových řad a v ekonometrice. Za jeho doktorských studií na univerzitě ve Stockholmu byl jeho školitelem Harald Cramér. Za jeho vedení obhájil v roce 1938 dizertační práci s názvem „Analýza stacionárních časových řad“.

$$y(k) = \frac{x(k)}{2} + \frac{x(k-1)}{2} \quad (6.97)$$

a přenosová funkce

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2z} = \frac{1+z}{2z}. \quad (6.98)$$

V tom případě má modulová frekvenční charakteristika tvar podle obr.6.25b. Sumační systém zdůrazňuje nízké frekvence (systém s takovými frekvenčními vlastnostmi nazýváme **dolní propust**), přičemž přenášené pásmo je v případě systému 1. řádu poměrně široké. Tuto vlastnost lze odvodit i z rozložení nul a pólů přenosové funkce. Systém má jeden pól v nule, tzn. že nemůže být už žádný stabilnější diskretní systém a jeden nulový bod pro $z = -1$. Tedy přenos pro polovinu vzorkovací frekvence, která na jednotkové kružnici v komplexní rovině z odpovídá komplexní hodnotě $z = -1$, je nulový.

Impulzní charakteristika zahrnuje váhy jednotlivých sčítanců, tj. při jednotkovém zesílení

$$h(k) = \{0,5 \ 0,5 \ 0 \ 0 \ \dots\} \quad (6.99)$$

a přechodová charakteristika, která je podle (5.38) dána součtem prvků impulzní odezvy je

$$g(k) = \{0,5; 1; 1; \dots\}. \quad (6.100)$$

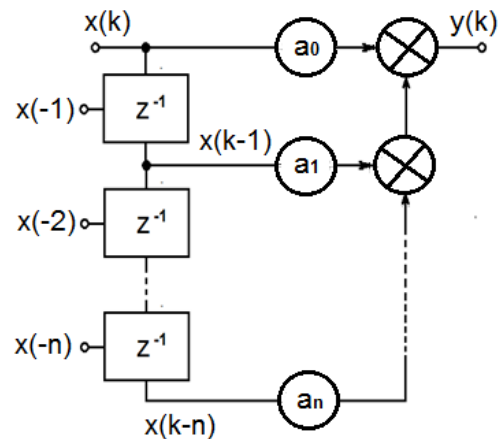
Fázová frekvenční charakteristika je vzhledem k symetričnosti impulzní charakteristiky lineární, sumační člen tedy nezavádí do zpracovávané posloupnosti fázové zkreslení. Velikost hodnot impulzní odezvy nemá v tomto případě na tvar fázové charakteristiky vliv.

Sumační člen n -tého řádu s konstantními koeficienty

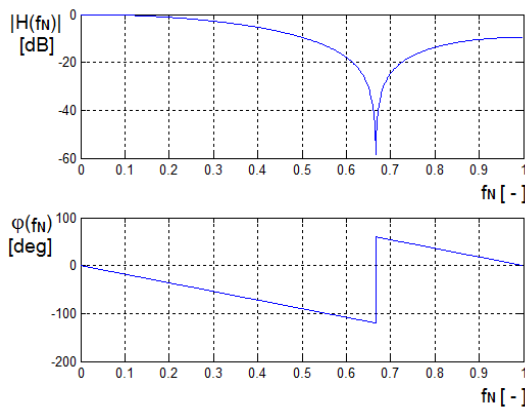
Prodloužení sumačního okna na n vzorků reprezentuje diferenční rovnice (realizační schéma je na obr.6.26)

$$y(k) = \sum_{i=0}^n a_i x(k-i), \quad (6.101)$$

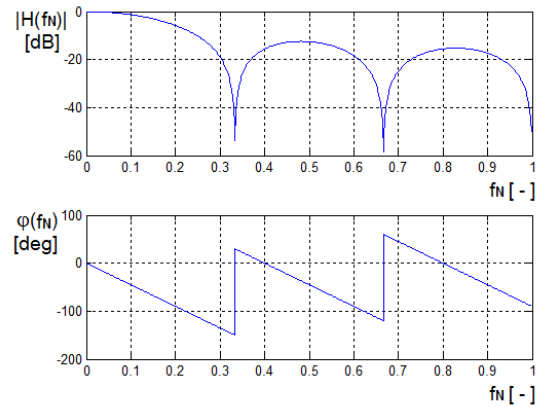
kde váhové koeficienty a_i mohou obecně nabývat jakékoliv reálné hodnoty, které posléze určují tvar frekvenčních charakteristik systému. V elementárním případě předpokládejme váhy a_i též velikosti. Má-li být zachováno jednotkové zesílení soustavy, pak $a_i = 1/n$ pro všechna i .



Obr.6.26 Realizační schéma sumačního členu n -tého řádu



a)



b)

Obr.6.27 Frekvenční charakteristiky sumačních členů pro a) $n = 3$ a b) $n = 6$

Obrazová přenosová funkce je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} = b_0 + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_n}{z^n} =$$

$$= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n} = \sum_{i=0}^n \frac{b_i z^{n-i}}{z^n}. \quad (6.102)$$

Frekvenční charakteristiky pro $n = 3$ a pro $n = 6$ jsou na obr.6.27. Protože impulzní charakteristika určená posloupností váhových koeficientů má obdélníkový tvar (všechny vzorky impulzní odezvy jsou téže velikosti), je modulová frekvenční charakteristika dána funkcí $\sin x/x$ (srovnejte s výsledky příkladů v kap.2.5, resp. 2.6), ovšem frekvenčně deformovanou tím, jak se různí frekvenční osa spojitých a diskrétních systémů. Nicméně zůstává pravidlo – čím je delší sumační okno, tím užší je propustné frekvenční pásmo na dolních frekvencích a naopak. Počet členů v sumačním okně také určuje počet nulových bodů na frekvenční charakteristice v pásmu $\langle 0, f_{vz} \rangle$ (připomínáme, že charakteristiky zobrazené na obrázcích v této kapitole jsou normované vůči $f_{vz}/2$). Fázová charakteristika je opět lineární (impulzní charakteristika je symetrická vůči svému středu), zlomy se změnami o 180° odpovídají změně polarity funkce $\sin(x)/x$ při průchodech nulou.

Diferenční člen

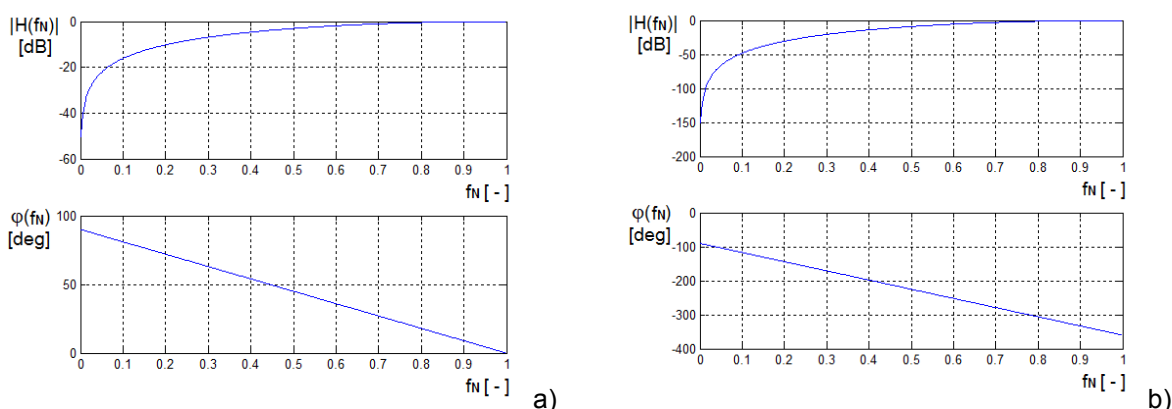
Diferenční člen prvního řádu je speciální případ sumačního členu s váhovými koeficienty $b_0 = 1$, $b_1 = -1$, resp. pro zachování jednotkového zesílení na $f_{vz}/2$ $b_0 = 0,5$, $b_1 = -0,5$. Diferenční rovnice pak je

$$y(k) = x(k) - x(k-1), \text{ resp } y(k) = 0,5x(k) - 0,5x(k-1) \quad (6.103)$$

Obrazová přenosová funkce tohoto diskrétního členu je (pro případ s jednotkovým zesílením)

$$H_{\Delta 1}(z) = \frac{1-z^{-1}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2z} = \frac{1-z}{2z}. \quad (6.104)$$

Frekvenční charakteristika tohoto systému je na obr.6.28a. Přenosová funkce má jeden nu-



0br.6.28 Frekvenční charakteristiky diferenčních členů pro a) $n = 1$ a b) $n = 3$

lový bod pro $z = 1$, má tedy nulový přenos na nulové frekvenci. Na rozdíl od sumačního členu diferenční člen zdůrazňuje složky vstupní posloupnosti s vyššími frekvencemi, systém s takovými frekvenčními vlastnostmi nazýváme **horní propustí**. Impulzní charakteristika má nenulové vzorky $h(k) = \{0,5, -0,5\}$. Je tedy antisymetrická vůči svému středu, fázová charakteristika je proto opět lineární. Přechodová charakteristika má vzorky $g(k) = \{0,5, 0, 0, \dots\}$, má tedy tvar diskrétního impulsu.

Diferenční systémy n -tého řádu (n -tou diferencí rozumíme diferencí $(n-1)$ -ního řádu) s jednotkovým zesílením jsou definovány diferenční rovnicí

$$y(k) = \frac{x(k) - \binom{n}{1}x(k-1) + \binom{n}{2}x(k-2) - \dots + (-1)^n x(k-n)}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}}. \quad (6.105)$$

a mají přenosovou funkci definovanou vztahem

$$H_{\Delta n}(z) = \frac{\binom{n}{0} - \binom{n}{1} \cdot z^{-1} + \binom{n}{2} \cdot z^{-2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot z^{-n}}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}} = \frac{(1 - z^{-1})^n}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}}. \quad (6.106)$$

Znamená to, že přenosová funkce má n -násobnou nulu pro $z = 1$, je proto zachován monotónní rostoucí průběh modulové frekvenční charakteristiky v pásmu $\langle 0, f_{vz}/2 \rangle$, průběh charakteristiky je ale strmější (frekvenční charakteristiky pro $n = 3$ je na obr.6.28b - tvar modulové charakteristiky je sice týž jako pro $n = 1$ na tomtéž obrázku, ale uvědomme si, že je zcela odlišné měřítko na y-ové ose grafu).

6.4.5 Autoregresivní systémy

Autoregresivní systém 1. řádu

Charakter autoregresivního systému 1. řádu se mění v závislosti na znaménku, se kterým do výpočtu vstupuje zpožděný vzorek výstupní posloupnosti. Uvažujme proto dvě varianty diferenční rovnice

$$y(k) - y(k-1) = x(k), \quad (6.107)$$

resp.

$$y(k) - y(k-1) = 2x(k) \quad (6.107a)$$

pro systém s jednotkovým zesílením na nulové frekvenci a

$$y(k) + y(k-1) = x(k), \quad (6.108)$$

resp.

$$y(k) + y(k-1) = 2x(k). \quad (6.108a)$$

Rozeberme nejdříve první případ. Výpočetní schéma tohoto systému, odpovídající diferenční rovnici

$$y(k) = 2x(k) + y(k-1), \quad (6.109)$$

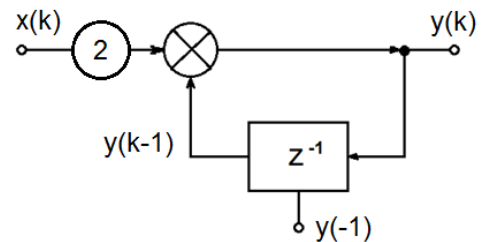
je na obr.6.29.

Jeho obrazová přenosová funkce je dána vztahem

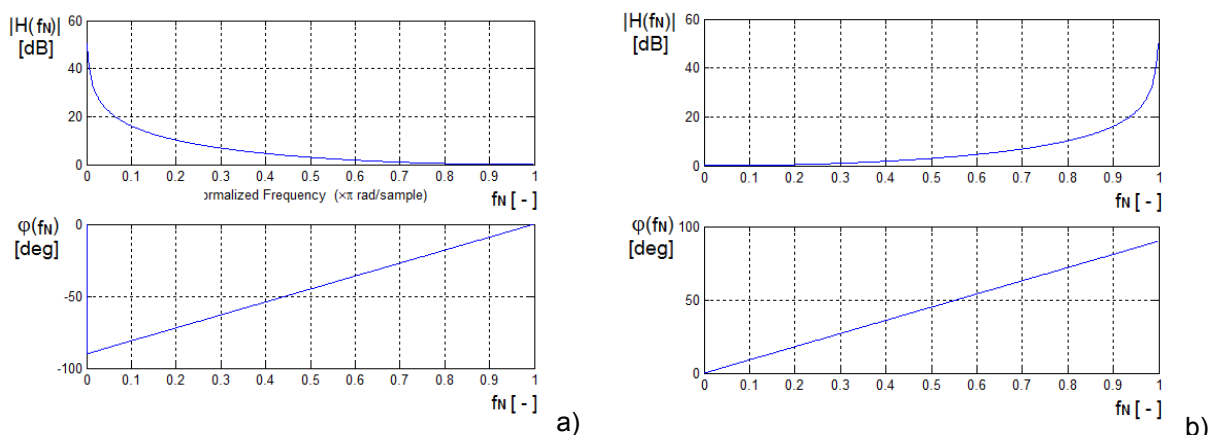
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 - z^{-1}} = \frac{2z}{z-1} \quad (6.110)$$

(srvn. se vztahem (5.17) pro transformaci Z kumulace).

Přenosová funkce má jeden nulový bod pro $z = 0$ (což není zas až tak důležité), ale co je důležitější jeden pól pro $z = 1$. Protože pól leží na jednotkové kružnici, znamená to, že systém je na mezi stability. Poloha pólu také znamená, že systém má rezonanční



Obr.6.29 Realizační schéma autoregresivního systému 1. řádu podle rov.(6.109)



Obr.6.30 Frekvenční charakteristiky autoregresivního systému 1.řádu a) podle rov.(6.107a); b) podle rov. (6.108a)

maximum na $f = 0$. Frekvenční charakteristiky odpovídající těmto závěrům jsou na obr. 6.30a.

Impulzní charakteristika je díky zpětné vazbě nekonečná (má nekonečně mnoho prvků) a lze ji určit jako odezvu na jednotkový diskretní impuls. Obdobně i přechodovou charakteristiku.

Příklad:

Určete průběh impulzní a přechodové charakteristiky autoregresivního systému 1. řádu určeného diferenční rovnicí podle vztahu (6.107a), resp. (6.109).

Řešení:

Impulzní charakteristika je odezva systému na jednotkový diskretní impuls, jehož průběh je podle vztahu (3.9) $\delta(k) = \{1, 0, 0, \dots\}$ pro $k \geq 0$. Výpočet proběhne podle diferenční rovnice (6.109), předpokládejme počáteční podmínku $y(-1) = 0$. Pak

$$\begin{aligned} y(0) &= 2x(0) + y(-1) = 2 \cdot 1 + 0 = 2; \\ y(1) &= 2x(1) + y(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2; \\ y(2) &= 2x(2) + y(1) = 2 \cdot 0 + 2 = 2; \\ y(3) &= 2x(3) + y(2) = 2 \cdot 0 + 2 = 2; \\ &\dots, \text{atd.} \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $h(k) = \{2, 2, 2, 2, \dots\}$, $k \geq 0$. Podle modulové frekvenční charakteristiky systému (obr.6.30a) je dominantně preferována stejnosměrná složka vstupní posloupnosti, tomu odezva na buzení jednotkovým impulzem odpovídá, výsledek je posloupnost o konstantní úrovni.

Přechodová charakteristika je odezva systému na jednotkovou skokovou posloupnost, jejíž průběh určuje vztah (3.10) $\sigma(k) = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ pro $k \geq 0$. Výpočet opět provedeme pomocí diferenční rovnice (6.109) s toutéž počáteční podmínkou $y(-1) = 0$. Je tedy

$$\begin{aligned} y(0) &= 2x(0) + y(-1) = 2 \cdot 1 + 0 = 2; \\ y(1) &= 2x(1) + y(0) = 2 \cdot 1 + 2 = 4; \\ y(2) &= 2x(2) + y(1) = 2 \cdot 1 + 4 = 6; \\ y(3) &= 2x(3) + y(2) = 2 \cdot 1 + 6 = 8; \\ &\dots, \text{atd.} \end{aligned}$$

Výsledná posloupnost $g(k) = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ je lineárně rostoucí, jak se sluší a patří na kumulaci proces, který reprezentuje obrazová přenosová funkce. $\square\square\square$

Obrazová přenosová funkce systému s diferenční rovnicí podle vztahu (6.108a) je

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 + z^{-1}} = \frac{2z}{z + 1} \quad (6.111)$$

a odpovídající realizační diferenční rovnice má tvar

$$y(k) = 2x(k) - y(k-1). \quad (6.112)$$

Přenosová funkce má pól v bodě $z = -1$. To znamená, že systém je opět na mezi stability a modulová frekvenční charakteristika má rezonanční extrém na frekvenci $f = f_{vz}/2$. Frekvenční charakteristiky odpovídající tomuto rozboru jsou zobrazeny na obr.6.30b.

Podobně jako v předchozím příkladu je díky zpětné vazbě impulzní charakteristika nekonečná.

Příklad:

Určete průběh impulzní a přechodové charakteristiky autoregresivního systému 1. řádu určeného diferenční rovnicí podle vztahu (6.108a), resp. (6.112).

Řešení:

Impulzní charakteristiku určíme pomocí diferenční rovnice (6.112), předpokládejme opět nulovou počáteční podmínku $y(-1) = 0$. Pak

$$y(0) = 2x(0) - y(-1) = 2 \cdot 1 - 0 = 2;$$

$$y(1) = 2x(1) - y(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2;$$

$$y(2) = 2x(2) - y(1) = 2 \cdot 0 - (-2) = 2;$$

$$y(3) = 2x(3) - y(2) = 2 \cdot 0 - 2 = -2;$$

:

Podobně pro přechodovou charakteristiku je

$$y(0) = 2x(0) - y(-1) = 2 \cdot 1 - 0 = 2;$$

$$y(1) = 2x(1) - y(0) = 2 \cdot 1 - 2 = 0;$$

$$y(2) = 2x(2) - y(1) = 2 \cdot 1 - 0 = 2;$$

$$y(3) = 2x(3) - y(2) = 2 \cdot 1 - 2 = 0;$$

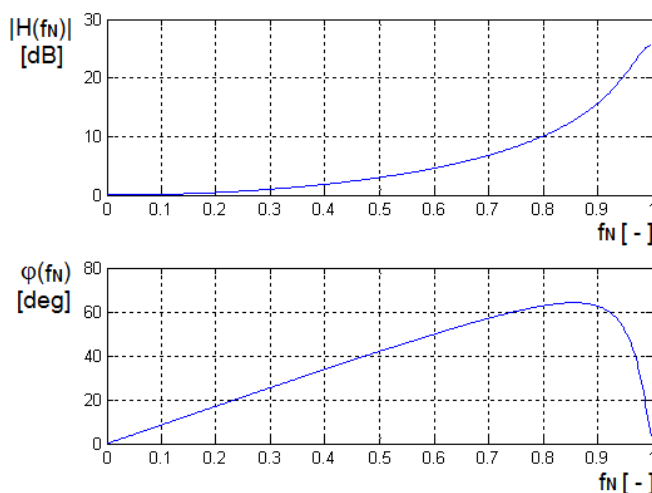
:

Pokud má systém dominantně preferovat frekvenční složku s frekvencí rovnou polovině vzorkovací frekvence a je-li systém na mezi stability, pak je logické, že impulzní odezva je periodická s dvouvzorkovou periodou. Stejnou periodu má i přechodová odezva. Její periodická složka je navíc přičtena ke konstantní úrovni, vyplývající z charakteru budící posloupnosti.

Zatímco lineární spojité systémy 1. řádu nemohou kmitat - k tomu je potřeba dvou komplexně sdružených pólů. Tedy spojitý kmitavý článek musí mít minimálně 2. řád, u diskrétního lineárního systému vlivem zpoždění způsobeného vzorkováním je situace poněkud jiná, je ale omezený výběr frekvencí, na nichž autoregresivní systém 1. řádu může kmitat pouze na $f = f_{vz}/2$.

U nekonečně dlouhé impulzní charakteristiky lze obtížně určit její střed, dle kterého bychom usoudili, zda je impulzní charakteristika symetrická či antisymetrická či nikoliv. Nicméně vůči kterémukoliv vzorku vypočítané nekonečné impulzní odezvy, který se nachází v nekonečnu, můžeme považovat (hodně intuitivně a matematici se snad nebudou za tuto velice hrubou úvahu moc zlobit) impulzní charakteristiku za symetrickou. Fázová charakteristika je lineární. □□□

Pokusme se nyní poněkud napravit mezní stabilitu systému, která může působit potíže např. díky zaokrouhlovacím chybám při výpočtu výstupní posloupnosti. Abychom stabilitu



Obr.6.31 Frekvenční charakteristiky autoregresivního systému podle rov.(6.113)

soustavy zvýšili, je potřeba posunout pól přenosové funkce směrem k počátku souřadnicové soustavy. Ověřme proto chování soustavy s přenosovou funkcí např.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1,9}{1 + 0,9z^{-1}} = \frac{1,9z}{z + 0,9}. \quad (6.113)$$

Přenosová funkce má pól na reálné hodnotě $z = -0,9$, což znamená, že dominantně zesilovaná frekvence zůstává táž, jako v případě systému popsaného vztahy (6.108a), resp. (6.111). Pokud se ale pól nenachází na jednotkové, tj. na frekvenční kružnici, pak modulová frekvenční charakteristika nemá na $f = f_{vz}$ nekonečnou hodnotu, rezonanční extrém se sníží (na určitou konečnou hodnotu) a rozšíří se. Frekvenční charakteristiky tohoto systému jsou zobrazeny na obr.6.31.

Příklad:

Určete hodnotu modulové frekvenční charakteristiky pro $f = f_{vz}/2$ systému s přenosovou funkcí podle vztahu (6.113).

Řešení:

Protože frekvenční modulová charakteristika je dána modulem obrazové přenosové funkce pro z na jednotkové kružnici, tj. pro substituci $z = e^{j\omega}$, resp. $z = e^{j\omega T_{vz}}$ pro konkrétní vzorkovací frekvenci či periodu. Pro frekvenci odpovídající polovině vzorkovací frekvenci je $z = -1$. Dosadíme tedy do přenosové funkce

$$H(z) = \frac{1,9z}{z + 0,9} = \frac{1,9 \cdot (-1)}{-1 + 0,9} = \frac{-1,9}{-0,1} = 19.$$

Protože modulovou charakteristiku máme zobrazenou v dB, určíme kolika decibelům poměrná hodnota $H_{AR1+s}(z) = 19$ odpovídá. Takovou hodnotu spočítáme podle vztahu

$$H(z)|_{dB} = 20 \log H_{AR1+s}(z) = 20 \log 19 \approx 25,6,$$

což je určitě hodnota, jíž lze odečíst i z charakteristiky na obr.6.31. □□□

Příklad:

Určete průběh impulzní charakteristiky autoregresivního systému 1. řádu určeného diferenční rovnicí podle vztahu (6.113).

Řešení:

Pro výpočet impulzní charakteristiky použijme téhož postupu jako v předchozích příkladech této kapitoly. K výpočtu použijme diferenční rovnici odvozenou z obrazové přenosové funkce podle (6.113), tj.

$$y(k) = 1,9x(k) - 0,9y(k-1)$$

a standardně počáteční podmínku $y(-1) = 0$. Pak pro impulzní odezvu je

$$\begin{aligned} y(0) &= 1,9 \cdot x(0) - 0,9 \cdot y(-1) = 1,9 \cdot 1 - 0,9 \cdot 0 = 1,9; \\ y(1) &= 1,9 \cdot x(1) - 0,9 \cdot y(0) = 1,9 \cdot 0 - 0,9 \cdot 1,9 = -1,71; \\ y(2) &= 1,9 \cdot x(2) - 0,9 \cdot y(1) = 2 \cdot 0 - 0,9 \cdot (-1,71) = 1,539; \\ y(3) &= 1,9 \cdot x(3) - 0,9 \cdot y(2) = 2 \cdot 0 - 0,9 \cdot 1,539 = -1,3851; \\ &\dots, \text{ atd.} \end{aligned}$$

Hodnoty impulzní odezvy v tomto případě počítáme podle vztahu $h(k) = (-1)^k \cdot 1,9 \cdot 0,9^k$ pro $k \geq 0$. Impulzní charakteristika má tedy tlumený kmitavý charakter. Tlumený průběh můžeme vysvětlit pozicí pólu přenosové funkce uvnitř jednotkové kružnice, tento průběh má také poněkud odlišný průběh spektra odpovídající tvaru frekvenční charakteristiky, přenos na polo-

viční vzorkovací frekvenci již není nekonečný, hodnoty přenosu pro všechny frekvence jsou konečné a příslušně se podílejí na ovlivnění spektra impulzní odezvy. □□□

Autoregresivní systém 2. řádu

Autoregresivní systém 2. řádu je obecně definován diferenční rovnicí

$$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) = a_0 \cdot x(k), \quad (6.114)$$

kde parametry a_0 , b_1 a b_2 určují frekvenční vlastnosti daného systému. Koeficienty nemohou být libovolné, musí být kombinací buď dvou reálných, nebo dvou komplexně sdružených pólů přenosové funkce. V následujícím textu se nebudeme zabývat jak určit tyto parametry, aby soustava měla požadované vlastnosti, rozebereme si jen několik typických případů. K vyslovení mnohých dílčích závěrů o vlastnostech analyzovaných soustav bude možné použít zkušenosti získané analýzou dříve popisovaných systémů.

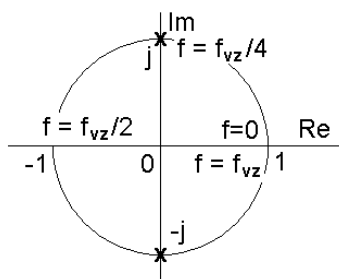
Začneme systémem definovaným diferenční rovnicí

$$y(k) + y(k-2) = 2 \cdot x(k), \quad (6.115)$$

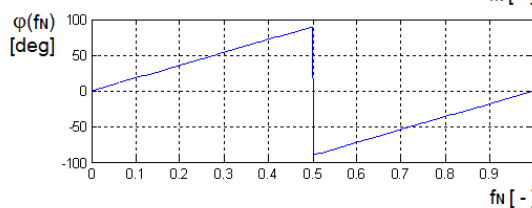
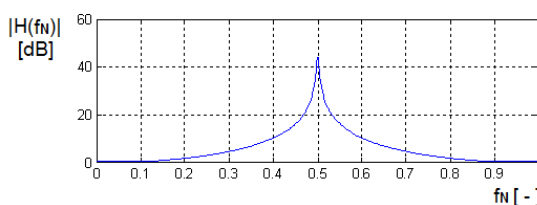
tj. rovnicí s parametry $a_0 = 2$, $b_1 = 0$ a $b_2 = 1$. Obrazová přenosová funkce v tomto případě je

$$H_{AR2}(z) = \frac{2}{1+z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2+1} = \frac{2z^2}{(z+j)(z-j)}. \quad (6.116)$$

Přenosová funkce má jednotkový přenos pro $z = 1$, tj. nulovou frekvenci, i pro $z = -1$, tj. pro $f = f_{vz}$. Má dva komplexně sdružené póly, jejichž reálná složka je nulová a leží na imaginární ose a současně jednotkové kružnici v poloze, která odpovídá čtvrtině vzorkovací frekvence (obr.6.32a). Modulová frekvenční charakteristika má proto rezonanční maximum na frekvenci rovné čtvrtině vzorkovací frekvence (obr.6.32b). Systém, který propouští pouze určité frekvenční pásmo, označujeme jako **pásmovou propust**. Systém je na mezi stability, impulzní charakteristika bude periodická a na základě dřívějších zkušeností by měla mít periodu čtyři vzorky.



a)



b)

Obr.6.32 a) Poloha pólů systému podle (6.116) v komplexní rovině z ; b) jeho frekvenční charakteristiky

Příklad:

Určete průběh impulzní charakteristiky autoregresivního systému 2. řádu určeného diferenční rovnicí podle vztahu (6.116).

Řešení:

Pro výpočet impulzní charakteristiky použijme již dříve osvědčeného postupu s diferenční rovnicí

$$y(k) = 2 \cdot x(k) - y(k-2),$$

a počátečními podmínkami $y(-1) = y(-2) = 0$.

Pro jednotlivé vzorky impulzní odezvy je

$$y(0) = 2 \cdot x(0) - y(-2) = 2 \cdot 1 - 0 = 2;$$

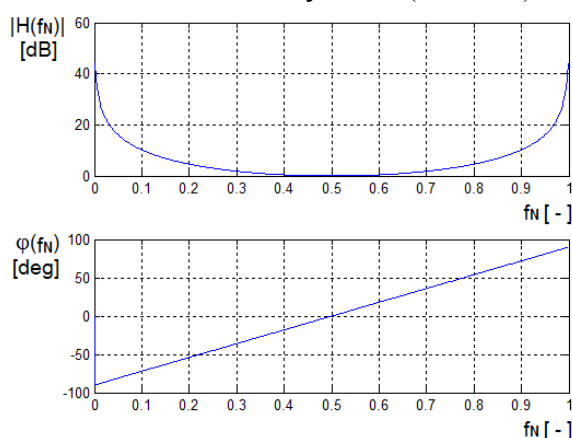
$$\begin{aligned}
y(1) &= 2 \cdot x(1) - y(-1) = 2 \cdot 0 - 0 = 0; \\
y(2) &= 2 \cdot x(2) - y(0) = 2 \cdot 0 - 2 = -2; \\
y(3) &= 2 \cdot x(3) - y(1) = 2 \cdot 0 - 0 = 0; \\
y(4) &= 2 \cdot x(4) - y(2) = 2 \cdot 0 - (-2) = 2; \\
y(5) &= 2 \cdot x(5) - y(3) = 2 \cdot 0 - 0 = 0; \\
&\dots, \text{ atd.}
\end{aligned}$$

Experimentálně je tak ověřeno, že impulzní charakteristika tohoto systému je periodická s periodou čtyř vzorků. $\square\square\square$

Jak by se změnily vlastnosti systému, kdyby se v diferenční rovnici změnilo znaménko u parametru b_2 a diferenční rovnice by byla

$$y(k) - y(k-2) = 2 \cdot x(k) \quad (6.117)$$

Postup analýzy je stále týž, snad může být pomůckou zobrazení frekvenčních charakteristik takto definovaného systému (obr.6.33).



Obr.6.33 Frekvenční charakteristiky autoregresivního systému 2. řádu definovaného diferenční rovnicí (6.117)

Dalším námětem pro úvahy může otázka jak se změni chování autoregresivní soustavy 2. řádu s parametry $b_1 = -\sqrt{2}$, $b_2 = 1$ a $a_0 = 2 + \sqrt{2}$?

Přenosová funkce tohoto systému má tvar

$$\begin{aligned}
H(z) &= \frac{z^2}{z^2 - \sqrt{2} \cdot z + 1} = \\
&= \frac{2z^2}{(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2})(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2})}.
\end{aligned} \quad (6.118)$$

To znamená, že argument obou pólů je $\pm 45^\circ$, což odpovídá osmině vzorkovací frekvence. Póly leží na jednotkové kružnici, systém je na mezi stability. Impulzní charakteristika je periodická s periodou osm vzorků.

Dále můžeme zvážit, jaký vliv by mělo posunutí pólů ke středu jednotkové kružnice u systému, např. definovaného vztahy (6.115), resp. (6.116) nebo naopak ekvivalentně vně jednotkové kružnice, podobně jak se zkoumalo u systému s přenosovou funkcí podle (6.113).

Autoregresivní systém n -tého řádu

Autoregresivní systém n -tého řádu je definován diferenční rovnicí

$$y(k) + b_1 \cdot y(k-1) + b_2 \cdot y(k-2) + \dots + b_n \cdot y(k-n) = a_0 \cdot x(k), \quad (6.119)$$

příp. přenosovou funkcí

$$H_{\text{ARn}}(z) = \frac{a_0}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n}}. \quad (6.120)$$

Mají-li být koeficienty b_i reálné, musí mít obrazová přenosová funkce póly buď reálné, nebo komplexně sdružené. Znamená to, že jakýkoliv autoregresivní systém vyššího řádu můžeme vytvořit sériovým zapojením autoregresivních systémů 1. či 2. řádu, jejichž vlastnosti již umíme rozpoznat. A jaký vliv má sériové zapojení dílčích soustav na vlastnosti výsledného systému, už také víme.

Takže vlastně víme všechno podstatné a důležité. Co víc si lze na konci této publikace přát?

Doporučená literatura

- [1] Holčík, J., Úvod do systémů a signálů. [Elektronické studijní texty], ČVUT v Praze – FBMI (2005)
- [2] Šebesta, V., Biolek, D., Systémy, procesy a signály I [Učební texty vysokých škol], VUT v Brně, Brno (1993)
- [3] Šebesta, V., Smékal, Z., Signály a soustavy. (Elektronické studijní texty FEKT VUT v Brně), Brno 2003.
- [4] Jan, J., Diskrétní metody zpracování biosignálů. Principy metod předzpracování. VUT v Brně, Brno (1976)
- [5] Jan, J., Číslíková filtrace, analýza a restaurace signálů. VUTIUM, Brno (2002)
- [6] Holčík, J., Kozumplík, J., Diskrétní metody zpracování biosignálů (Syntéza číslicových filtrů), Ediční středisko VUT, Brno (1977)
- [7] Hřebíček, J., Kubásek, M., Environmentální informační systémy. Akademické nakladatelství CERM, Brno (2011)
- [8] Cipra, T., Finanční ekonometrie. Ekopress, Praha (2008)
- [9] Lathi, B.P., Linear Systems and Signals. Intern. 2nd ed., Oxford University Press, New York (2010)
- [10] Hsu, H.P., Signals and Systems. Schaum's Outlines. McGraw Hill, New York (1995)
- [11] Karu Z.Z., Signals and Systems Made Ridiculously Simple. ZiZi Press, Cambridge (MA) (1995)
- [12] McMahon, D., Signals and Systems Demystified, McGraw Hill, New York (2007)
- [13] Karris S.T., Signals and Systems with MATLAB® Computing and Simulink® Modeling. 4th ed., Orchard Publ., (2008)
- [14] Kamen, E.W., Heck, B.S., Fundamentals of Signals and Systems using the Web and Matlab®, 3rd ed., Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River (2007)
- [15] Shanmugan, K.S., Breipohl, A.M., Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis. John Wiley & Sons, New York 1988
- [16] Smith, S.W., The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. California Technical Publ., San Diego (1997), <http://www.dspguide.com/> (1.4.2012)
- [17] Diggle, P.J., Time Series. A Biostatistical Introduction. Oxford University Press (1996)
- [18] Taylor S.J., Modelling Financial Time Series. 2nd ed., World Scientific, New Jersey (2008)
- [19] Cryer, J.D., Chan K.-S., Time Series Analysis With Application in R. 2nd ed., Springer Texts in Statistics. Springer, New York (2008)
- [20] Falk M., A First Course on Time Series Analysis – Examples with SAS. Vision 2006.Sep.01 (2006) http://www.statistik-mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040800/user_upload/time_series/the_book/2011-March-01-times.pdf (1.4.2012)
- [21] www.pedf.cuni.cz/kpsp/skalouda/korelace.doc (1.4.2012)

Obsah

1	Kapitola úvodní – především inspirační a motivační	3
1.1	Co očekáváme od této kapitoly	3
1.2	Začínáme – několik příkladů na úvod	3
1.3	Pojmy z titulu	6
1.3.1	Signál a časová řada	6
1.3.2	Systém	10
1.4	Časové řady – co s nimi	13
2	Signály spojitý v čase	16
2.1	Věty na úvod	16
2.2	Základní typy matematických modelů signálů spojitých v čase	17
2.2.1	Periodické funkce	17
2.2.2	Neperiodické funkce	20
2.3	Ještě dva důležité pojmy	23
2.4	Základní operace s matematickými modely signálů spojitých v čase	23
2.4.1	Operace s jednou funkcí	23
2.4.2	Konvoluce	24
2.4.3	Korelace	29
2.5	Rozklad spojitých periodických funkcí na dílčí harmonické složky	35
2.6	Rozklad spojitých neperiodických funkcí na dílčí harmonické složky – Fourierova transformace	40
2.6.1	Definice	40
2.6.2	Vlastnosti Fourierovy transformace	41
2.6.3	Hrstka příkladů na konec	41
3	Signály diskrétní v čase	46
3.1	Pár úvodních myšlenek, aneb co bychom v třetí kapitole chtěli	46
3.2	Vzorkování	46
3.2.1	Několik definic na úvod	46
3.2.2	Vzorkování signálů – vzorkovací teorém	47
3.3	Základní typy matematických modelů signálů diskrétních v čase	51
3.3.1	Konvence na začátek	51
3.3.2	Periodické posloupnosti	51
3.3.3	Jednorázové posloupnosti	52
3.4	Základní operace s matematickými modely signálů diskrétních v čase	53
3.4.1	Úvodní poznámky	53
3.4.2	Diskrétní konvoluce	53
3.4.3	Diskrétní korelace	55
3.4.4	Rozklad diskrétních periodických posloupností	59
3.4.5	Fourierova transformace s diskrétním časem	62
3.4.6	Diskrétní Fourierova transformace	63
3.4.7	Rychlá Fourierova transformace	66
4	Matematický popis systémů pracujících ve spojitém čase	69
4.1	Pár úvodních myšlenek, aneb co bychom ve čtvrté kapitole chtěli	69

4.2	Linearita	69
4.3	Vnější (vstupní/výstupní) popis	70
4.3.1	Slova úvodní	70
4.3.2	Diferenciální rovnice	70
4.3.3	Laplacova transformace	73
4.3.4	Operátorová přenosová funkce	77
4.3.5	Rozložení nulových bodů a pólů operátorové přenosové funkce	78
4.3.6	Frekvenční přenosová funkce a frekvenční charakteristiky	79
4.3.7	Časové charakteristiky	83
4.3.8	Vzájemné vztahy mezi různými formami vnějšího popisu spojitého lineárního systému	84
4.4	Vnitřní (stavový) popis	85
4.5	Chování systémů	87
4.5.1	Základní jevy v systémech	87
4.5.2	Stabilita	87
4.5.3	Kauzalita	91
5	Matematický popis systémů pracujících v diskrétním čase	92
5.1	Opět pár myšlenek na úvod, aneb co bychom chtěli v páté kapitole	92
5.2	Vnější (vstupní/výstupní) popis	92
5.2.1	Diferenční rovnice	92
5.2.2	Z transformace	93
5.2.3	Operátorová přenosová funkce	96
5.2.4	Frekvenční přenosová funkce a frekvenční charakteristiky	98
5.2.5	Časové charakteristiky	100
5.3	Vnitřní (stavový) popis	102
5.4	Stabilita	102
6	Základní systémové struktury	104
6.1	Na úvod závěrečné kapitoly	104
6.2	Základní formy spojování systémů	104
6.2.1	Sériové (kaskádní) zapojení	104
6.2.2	Paralelní zapojení	105
6.2.3	Zpětnovazební zapojení	106
6.3	Základní typy systémů pracujících ve spojitém čase	110
6.3.1	Proporcionální člen	110
6.3.2	Integrační člen	111
6.3.3	Systém 1. řádu se setrvačností	112
6.3.4	Derivační člen	114
6.3.5	Reálný derivační člen	115
6.3.6	Statický systém 2. řádu	116
6.3.7	Zpožďovací člen	118
6.4	Základní typy systémů pracujících v diskrétním čase	119
6.4.1	Proporcionální člen	119
6.4.2	Zpožďovací člen	119
6.4.3	Základní struktury s diskrétním časem	120

6.4.4 Systémy s klouzavým průměrem	121
6.4.5 Autoregresivní systémy	124
Doporučená literatura	130
Obsah	131
Summary	134

Summary

The book “Signals, Time Series, and Linear Systems” provides introduction into the field of time data processing. It was written with support of the ESF grant No. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 “Multidisciplinary Innovation of Study in Computational Biology”.

The first chapter aims to be inspiring and motivating, introduces fundamental terms and numerous practical examples, in which the knowledge obtained hereinafter can be employed.

Two subsequent chapters deal with methods for description of time functions and series. Time functions and series in time domain are described at first. Terms convolution and correlation are explained in very details. The term frequency spectrum is subsequently introduced and methods for transformation from time to frequency domain and vice versa are described. Terms such as Fourier series, Fourier transform, Fourier transform in discrete time, and discrete Fourier transform, respectively, are defined for this purpose. Ways of their application for basic functions and series are described and typical shapes of frequency spectra for specific selected functions and series are shown, as well.

The second part of this publication is focused on linear system operating in both continuous and discrete time mode. Basic methods of input/output description of linear systems are presented by means of differential and difference equations, respectively, transfer functions and their properties, by means of frequency and time (impulse, transient) responses.

The last chapter deals with fundamental computational structures of linear systems. Basic forms of system connections – serial, parallel and feed-back connection – are explained and the chapter is concluded with description of fundamental continuous and discrete realizations, such as proportional, integrative, derivative and real derivative blocks for continuous time. For the discrete time, the chapter particularly emphasizes basic structures with moving average and autoregressive systems.

The lessons are often accompanied with illustrative examples that explain principle of the described methods.

Poznámky:

Signály, časové řady a lineární systémy
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

Recenzenti: prof. Ing. Vladimír Šebesta, CSc., doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr.

Obálka: Radim Šustr, DiS.

Jazyková korekce: Ing. Marie Juranová

Vydalo: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, s.r.o. Brno

Purkyňova 95a, 612 00 Brno

www.cerm.cz

Tisk: FINAL TISK s.r.o. Olomučany

Náklad: 200 ks

Vydání: první

Vyšlo v roce 2012

ISBN 978-80-7204-792-5